Colle 11 : quinzaine du 24 mars au 6 avril

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité. Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Dérivabilité à gauche, à droite. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables en un point ou sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.
Propriétés des fonctions dérivables : condition nécessaire d'extremum en un point intérieur. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : toute fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est bornée est lipschitzienne. Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables. Théorème de limite de la dérivée.
Fonctions de classe C^k. Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.
Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une corde ou une tangente (si la fonction est dérivable). Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
Cas des fonctions à valeurs complexes.

Espaces vectoriels : Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples de références : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Sous-espaces vectoriels, caractérisation.

A - Questions de cours :

1. Donner la définition des notions de dérivabilité en un point et de nombre dérivé.
2. Énoncer la condition nécessaire d'extremum en un point intérieur. Énoncer le théorème de Rolle.
3. Énoncer l'égalité des accroissements finis.
4. Donner la définition de la notion de fonction lipschitzienne. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
5. Énoncer la formule de Leibniz.
6. Définir la notion de fonction convexe.
7. Donner la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses cordes. La traduire en une inégalité portant sur la fonction.
8. Donner la position de la courbe représentative d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes. La traduire en une inégalité portant sur la fonction.
9. Donner la caractérisation d'une fonction convexe parmi les fonctions dérivables. Donner la caractérisation d'une fonction convexe parmi les fonctions deux fois dérivables.
10. Énoncer la caractérisation de la notion de sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

B - Savoir-faire

1. Calculer les dérivées successives d'une fonction du type produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle, données par le colleur.
2. Calculer les dérivées successives d'une fonction du type $x \mapsto \cos(\alpha x)\,\mathrm{e}^{\omega x}$ ou $x \mapsto \sin(\alpha x)\,\mathrm{e}^{\omega x}$ donnée par le colleur.
3. En cherchant parmi les points critiques et les extrémités d'un intervalle, déterminer les extrema locaux d'une fonction choisie par le colleur.
4. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. En déduire la limite de la suite de terme général $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
5. En utilisant la convexité, montrer que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents