Colle 12 : quinzaine du 21 avril au 3 mai

Espaces vectoriels : Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples de références : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Sous-espaces vectoriels, caractérisation. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Applications linéaires : applications linéaires, endomorphismes. Opération : combinaison linéaire et composée. Image directe d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité.
Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs et symétries ; caractérisation des projecteurs et des symétries. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Ensembles finis et dénombrement : Cardinal d'un ensemble fini, d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Applications entre ensembles finis. Opérations sur les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire, produit cartésien. Listes et combinaison. Si E et F sont deux ensembles finis, cardinal de F^E, de $\mathcal{P}(E)$, nombre d'injections de E dans F, nombre de permutations de E, nombre de parties à p éléments de E.

A - Questions de cours :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. Définir le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, \dots, e_p)$. Énoncer sa caractérisation en terme de plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteur $e_1, \dots, e_p$.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Définir la somme de F et G. Quand dit-on que cette somme est directe ? Quand dit-on que F et G sont supplémentaires ?
3. Définir la notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels.
4. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Donner la définition du noyau et de l'image de u.
5. Définir la notion d'équation linéaire. Donner la structure de l'ensemble de ses solutions.
6. Définir la notion de projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Caractériser les projecteurs de E.
7. Définir la notion de symétrie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Caractériser les symétries de E.
8. Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, du complémentaire, d'un produit cartésien.
9. Que peut-on dire d'une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal ? d'une application surjective ?

B - Savoir-faire

1. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Prouver que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. Application à $\mathrm{Im}(u)$.
3. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, et H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E. Application à $\mathrm{Ker}(u)$.
4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ u)$ et que $\mathrm{Im}(u \circ u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
5. Décrire comme un sous-espace vectoriel engendré le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par le colleur.
6. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par le colleur.
7. Dénombrer le nombre d'applications entre deux ensembles finis E et F, puis le nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis E et F.
8. Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble fini E.
9. Démonstration combinatoire de la formule du triangle de Pascal.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents