Chapitre 20 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Première partie
Famille de vecteurs

1 Famille génératrice

Définition — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque $E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$.

En d'autre termes, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$.

Conventions :
- La famille vide est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\{0_E\}$.
- Dans les énoncés suivants, si $n = 0$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E, alors on convient que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la famille vide.

Exemples :
- Dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(1, \mathrm{i})$ est génératrice, car pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.
- Dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille $(1, \mathrm{i})$ est encore génératrice (pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $z = a + ib$). Mais la famille (1) est également génératrice car pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $z = \lambda.1$ ($\lambda = z$ convient).
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice, pour tout $e = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e = x(1,0) + y(0,1)$.
  De même, la famille $((1,1),(1,-1),(1,0))$ est génératrice car, pour tout $e = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e = y(1,1) + 0(1,-1) + (x-y)(1,0)$ (d'autres coefficients pourraient convenir).
- Dans $E = \{y \in D^2(\mathbb{R}) | y'' + y = 0\}$, la famille $(\cos, \sin)$ est génératrice car après résolution de l'équation différentielle, on obtient
$$E = \{A \cos + B \sin | A, B \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\cos, \sin).$$
- La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ car les vecteurs $1, X, \dots, X^n$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_k X^k$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $M_2(\mathbb{R})$ car les quatre vecteurs de la famille appartiennent à $M_2(\mathbb{R})$ et pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,
$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Déterminer une famille génératrice de $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(2) = 0\}$. On obtient
$$\begin{aligned} E &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] | (X-2) \text{ divise } P\} \\ &= \left\{(X-2)(aX^2 + bX + c) | a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{Vect}((X-2)X^2, (X-2)X, X-2) \end{aligned}$$
  donc la famille $((X-2)X^2, (X-2)X, X-2)$ est une famille génératrice de E.

Vocabulaire : Lorsque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, on dit que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ engendrent E.

Exemple : Les vecteurs $(1,2,3)$, $(2,1,4)$, et $(3,1,-1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?
Ces trois vecteurs sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,1,4) + \lambda_3(3,1,-1) = (a,b,c)$$

ssi le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution. Or :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = c \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= a \\ -3\lambda_2 - 5\lambda_3 &= b - 2a \\ -2\lambda_2 - 10\lambda_3 &= c - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 + 2\lambda_2 &= a \\ -5\lambda_3 - 3\lambda_2 &= b - 2a \\ 4\lambda_2 &= a + c - 2b \end{cases}$$

Le système admet donc toujours des solutions.
Par conséquent, pour tout $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,1,4) + \lambda_3(3,1,-1) = (a,b,c) \quad :$$

les vecteurs $(1,2,3)$, $(2,1,4)$, et $(3,1,-1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exemple : Les vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,1,-1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?
Ces deux vecteurs sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(3,1,-1) = (a,b,c)$$

ssi le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = b \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = c \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins une solution. Or :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_1 &= b \\ 5\lambda_1 &= b + c \\ -5\lambda_1 &= a - 3b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_1 &= b \\ 5\lambda_1 &= b + c \\ 0 &= a - 2b + c \end{cases}$$

Si $a - 2b + c \neq 0$, le système présente une ligne incompatible donc n'admet pas de solution. Par exemple, le vecteur $(1,0,0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,1,-1)$.
Par conséquent, les vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,1,-1)$ n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

Proposition — Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Alors :

- Pour toute permutation φ de $[\![1;n]\!]$, la famille $(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)})$ est encore génératrice de E.
  En d'autres termes :
  $$\mathrm{Vect}(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires **non nuls**, alors la famille $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ est encore génératrice de E.
  En d'autres termes :
  $$\mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$
- Pour tous $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, la famille $(e'_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e'_1 = e_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k e_k$ est encore génératrice de E.
  En d'autres termes :
  $$\mathrm{Vect}(e_1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$
- Pour tout $x \in E$, la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ est encore génératrice de E.

Proposition — Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Alors :
la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est encore génératrice de E ssi e_n est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Preuve. Supposons que $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est génératrice de E. Le vecteur e_n appartient à $E = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$ donc e_n est combinaison linéaire de $e_1,\dots,e_{n-1}$.

Supposons que e_n soit combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_{n-1})$. Alors $e_n \in \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$.
$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_1,\dots,e_n$ donc

$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1}).$$

Or $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E donc $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = E$ Ainsi $E \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$. L'inclusion réciproque est claire car $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de E.
Finalement, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1}) = E$ et par conséquent, la famille $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une famille génératrice de E. □

2 Familles libres, liées

Définition — Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soient $e_1,\dots,e_p$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est liée s'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0,\dots,0)\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$$

Exemples :
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est-elle liée ?
  Pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
  $$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0.$$
  Donc la famille $((1,0),(0,1))$ n'est pas liée.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,1),(1,-1),(1,0))$ est-elle liée ?
  On remarque (après avoir cherché au brouillon) que
  $$(1,1) + (1,-1) - 2(1,0) = (1+1-2, 1-1) = (0,0)$$
  donc la famille $((1,1),(1,-1),(1,0))$ est liée.

Définition — Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soient $e_1,\dots,e_p$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = 0 \implies \forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0 \right)$$

Convention : On convient que la famille vide est libre.

Exemples :
- Une famille constituée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(\cos, \sin)$ est-elle libre ?
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0_E$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$.
  En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda = 0$
  Puis, en prenant $x = \pi/2$, on trouve $\mu = 0$.
  Donc la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille (f, g, h) avec $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto xe^x$ et $h : x \mapsto (x-1)^3$ est-elle libre ?
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg + ch = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\cos(x) + bxe^x + c(x-1)^3 = 0$. On pourrait évaluer cette relation en trois valeurs de x pour en déduire trois égalités qui nous permettraient de déterminer a, b et c. Mais on peut également utiliser les limites : si $b \neq 0$,
  $$a\cos(x) + bxe^x + c(x-1)^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} bxe^x$$
  donc la limite en $+\infty$ de la fonction $a f + b g + c h$ vaut $\pm\infty$ suivant le signe de b.
  Or cette limite est nulle car la fonction $a f + b g + c h$ est nulle par hypothèse. Donc $b = 0$.

Par conséquent, $a\cos(x) + c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourrait à nouveau montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ est absurde en utilisant les limites. On peut également évaluer cette relation en 1 pour en déduire $a\cos(1) = 0$ donc $a = 0$. Alors $c(x-1)^3 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $-c = 0$ donc $c = 0$.
Par conséquent, on a montré que si $af + bg + ch = 0$, alors $a = b = c = 0$: la famille (f, g, h) est libre.

- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est-elle libre ? Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = 0$. Alors, puisque l'égalité de deux polynômes induit l'égalité de ses coefficients, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre.

Proposition — Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors :
- Toute famille extraite de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est encore libre.
- Si φ est une permutation de l'ensemble $[\![1; n]\!]$, la famille $(e_{\varphi(1)}, \ldots, e_{\varphi(n)}$ est libre.
- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires **non nuls**, la famille $(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n)$ est libre.
- Pour tous $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, la famille $(e_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k e_k, e_2, \ldots, e_n)$ est libre.

Proposition — Soit $p \in \mathbb{N}$, soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors, pour tout $x \in E$, $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est libre ssi $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Preuve. Soit $x \in E$. Par contraposée, montrons que $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ ssi $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est liée.
Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p.$$

On en déduit

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p + (-1)x = 0$$

et puisque $-1 \neq 0$, la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est liée.

On vient d'établir la première implication.

Supposons $(e_1, \ldots, e_p, x)$ liée. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p + \lambda_{p+1} x = 0_E.$$

Alors $-\lambda_{p+1} x = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p$.
Supposons $\lambda_{p+1} = 0$. On obtient $\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p = 0_E$. Or la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui est absurde car $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ ne sont pas tous nuls.
Par conséquent, $\lambda_{p+1} \neq 0$ et ainsi $x = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_{p+1}} e_1 + \cdots + \dfrac{-\lambda_p}{\lambda_{p+1}} e_p$ donc $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
On vient donc d'établir l'implication réciproque, et, par double implication, on a bien établi l'équivalence cherchée. □

Définition — Soit $e_1, e_2 \in E$. Les vecteurs e_1 et e_2 sont dits colinéaires lorsque il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e_1 = \lambda e_2$ ou $e_2 = \lambda e_1$.

Remarque : — Deux vecteurs e_1, e_2 de E forment une famille libre si et seulement si ils ne sont pas colinéaires (écrivez la justification !).

Définition — Soit $n \in \mathbb{N}, P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On dit que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés lorsque

$$\deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_n.$$

Proposition — Soit $n \in \mathbb{N}, P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés et que $P_0 \neq 0$. Alors la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Preuve. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons H_k l'assertion " la famille $(P_0, \ldots, P_k)$ est libre".

- L'assertion H_0 est vraie car (P_0) est une famille constituée d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que l'assertion H_k soit vraie.
  Posons $p = \deg P_k$. Puisque $\deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_k = p$ alors $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{K}_p[X]$, ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k) \subset \mathbb{K}_p[X]$ car $\mathbb{K}_p[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant P_0, $P_1, \ldots, P_k$.
  Or $\deg P_{k+1} > p$ donc $P_{k+1} \notin \mathbb{K}_p[X]$. Ainsi $P_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$.

  On sait que $(P_0, \ldots, P_k)$ est libre d'après H_k et $P_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$, par conséquent, la famille $(P_0, \ldots, P_{k+1})$ est libre, donc l'assertion H_{k+1} est vraie.
- Le principe de récurrence assure que l'assertion H_k est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En particulier, l'assertion H_n est vraie, ce qu'il fallait démontrer.

$\square$

Exemple : Soient $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés ne contenant pas 0, donc c'est une famille libre.

Proposition — Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Alors, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$ sont en somme directe.

Preuve. Montrons que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \cap \ Vect(e_{k+1}, \ldots, e_p) \subset \{0_E\}$.
Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \cap \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$.
Le vecteur x appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ et le vecteur x appartient à $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_p)$ donc il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que $x = \alpha_1 \cdot e_{k+1} + \cdot + \alpha_{p-k} \cdot e_p$.
Alors

$$0_E = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + (-\alpha_1) e_{k+1} + \cdots + (-\alpha_{p-k}) e_p.$$

Or $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = -\alpha_1 = \cdots = -\alpha_{p-k} = 0$. Par conséquent, $x = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot e_i = 0_E$ ce qui prouve l'inclusion.
La deuxième inclusion étant évidente, on en déduit $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \cap \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p) = \{0_E\}$ et la caractérisation des sommes directes permet de conclure. $\square$

3 Bases

Définition — Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E lorsque cette famille est à la fois libre et génératrice de E.

Exemples :

- Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, la famille formée des vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

  est à la fois libre et génératrice. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.
- Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$,
  - $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique.
  - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ libre (car c'est une famille de polynôme de degrés échelonnés ne contenant pas 0) et génératrice car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

    d'après la formule de Taylor. C'est donc également une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ appelée base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
- Plus généralement, la famille

$$(E_{1,1}, \ldots, E_{1,p}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,p}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,p})$$

  où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de taille $n \times p$ dont le seul coefficient non nul est un 1 en position (i, j) (appelée matrice élémentaire), est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Considérons $E = \{y \in D^2(\mathbb{R}) | y'' + y = 0\}$. On a vu précedemment que la famille $(\cos, \sin)$ est une famille génératrice de E et que la famille $(\cos, \sin)$ est libre. Donc $(\cos, \sin)$ est une base de E.

Remarque importante : Si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, c'est une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ♡

Proposition — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi

$$\forall x \in E, \exists!(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i.$$

Démonstration. Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E.
Soit $x \in E$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E donc x est combinaison linéaire des e_i : il existe $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$.
Supposons qu'il existe $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n' \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \cdot e_i$. Alors

$$0_E = x - x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i') \cdot e_i.$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\xi_i - \xi_i' = 0$, donc $\xi_i = \xi_i'$.
On vient de montrer que :

$$\forall x \in E, \exists!(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i.$$

D'où la première implication.

Supposons à présent que

$$\forall x \in E, \exists!(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i.$$

En particulier, tout vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs e_i. Donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E.
De plus, puisque $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$, si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i = 0$, alors $\xi_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (par unicité des coefficients). Donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
Libre et génératrice, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de E.

On vient d'établir la deuxième implication.
Finalement, on a établi l'équivalence en montrant la double implication. □

Définition — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$. On appelle <u>coordonnées</u> de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ l'unique n-uplet $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot e_i$.
On définit alors la matrice de x relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$, notée $\mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(x)$ en posant

$$\mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Exemples :

- Munissons $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ (comme vu précédemment). Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Alors $\mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Munissons $\mathbb{K}_4[X]$ de sa base canonique et considérons $P = -3 + 2X^2 - 4X^3$. Alors $\mathrm{Mat}_{(1,\ldots,X^4)}(P) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Munissons $M_2(\mathbb{R})$ de sa base canonique $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, et considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Mat}_B(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Théorème ♡♡♡ — Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_1 et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ une base de E_2.

Alors E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ssi $B = (e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est une base de E.

Dans ce cas, B est appelée base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.

Preuve. Supposons que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Montrons que B est une base de E.

- Montrons que <u>B est génératrice de E :</u>

$$E = E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) + \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$$

  donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
- Montrons que <u>B est libre :</u>
  Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+r} \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p + \lambda_{p+1}\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{p+r}\varepsilon_r = 0_E$,
  alors $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in E_1} = \underbrace{-\lambda_{p+1}\varepsilon_1 + \cdots - \lambda_{p+r}\varepsilon_r}_{\in E_2}$.
  Donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in E_1 \cap E_2$ et $\lambda_{p+1}\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{p+r}\varepsilon_r \in E_1 \cap E_2$.
  Or E_1 et E_2 sont supplémentaires donc $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Par conséquent, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$ $(*)$. De plus, la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre car c'est une base de E_1. Donc avec $(*)$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
  De même, on obtient $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+r} = 0$.
  On a donc montré que la famille B est libre.

Finalement, libre et génératrice de E, la famille B est une base de E.

Supposons à présent que B soit une base de E. En particulier, la famille $(e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est libre donc $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(epsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ sont en somme directe.
De plus, B engendre E, donc

$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) + \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = E.$$

Par conséquent, E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

Finalement, on a montré par double implication que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ssi B est une base de E. □

Deuxième partie
Dimension d'un espace vectoriel

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition — On dit que l'espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie.

Exemples :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ où $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^n)$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.
- $M_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
  Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.
- Posons $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) | y'' + y = 0\}$. On a vu que $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ donc E est de dimension finie
- $\{0\} = \mathrm{Vect}(0)$ donc $\{0\}$ est de dimension finie. ♡
- Montrons que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
  Supposons que $\mathbb{K}[X]$ soit de dimension finie : il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n)$.
  Posons $r = \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$. Alors toute combinaison linéaire des vecteurs $P_1, \dots, P_n$ est de degré r au maximum, et en particulier, $X^{r+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n) = \mathbb{K}[X]$, ce qui est absurde.
  Donc $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

2 Existence de bases

Théorème de la base incomplète — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors on peut compléter la famille $\mathcal{L}$ en une base de E.

Plus précisément, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E, on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui ajoutant certains des vecteurs x_i.

Preuve. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E. On construit une suite de famille $(\mathcal{L}_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ de la manière suivante :
- on pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$
- pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on note $\mathcal{F}_k$ la famille constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{L}_k$ et du vecteur x_{k+1} et on pose

$$\mathcal{L}_{k+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_k \text{ si la famille } \mathcal{F}_k \text{ est liée} \\ \mathcal{F}_k \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par construction, on remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $\mathcal{L}_i$ est libre et $x_1, \dots, x_i \in \mathrm{Vect}\mathcal{L}_i$ (cela se vérifie par récurrence finie).
En particulier, la famille $\mathcal{L}_n$ est libre et $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L}_n)$. $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ donc il contient $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Or $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$ car la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E. Ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}_n) = E$: la famille $\mathcal{L}_n$ est génératrice de E.
Libre et génératrice, la famille $\mathcal{L}_n$ est une base de E, obtenue en ajoutant certains des vecteurs x_i à la famille $\mathcal{L}$.
□

Exemple : On considère la famille $\mathcal{L} = ((1,1,0,0), (0,1,1,0))$. Il s'agit d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Complétons-la en une base de $\mathbb{R}^4$ au moyen des vecteurs de la base canonique : $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.

$$e_1 \in \mathcal{L} \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, e_1 = \lambda_1(1,1,0,0) + \lambda_2(0,1,1,0) \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système n'étant pas compatible, $e_1 \notin \mathcal{L}$, donc la famille $\mathcal{L}' = ((1,1,0,0),(0,1,1,0),e_1)$ est libre.
On remarque que $e_2 \in \mathcal{L}'$ car $e_2 = (1,1,0,0) - (1,0,0,0)$.
$e_3 \in \mathcal{L}'$ ssi le système $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$ admet des solutions. On remarque que $(-1,1,1)$ est solution de ce système : $e_3 = (0,1,1,0) - (1,1,0,0) + (1,0,0,0)$, donc $e_3 \in \mathcal{L}'$.
$e_4 \notin \mathcal{L}'$ car la dernière composante des vecteurs de $\mathcal{L}'$ est nulle, alors que celle de e_4 est non nulle : e_4 ne peut être combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}'$: la famille $\mathcal{B} = ((1,1,0,0),(0,1,1,0),e_1,e_4)$ est donc une famille libre. Elle est également génératrice car $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \text{Vect}(\mathcal{B})$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.