Colle 3 : quinzaine du 6 au 19 novembre

Nombres complexes : Complexes de module 1. Notation $e^{i\theta}$. Formules d'Euler et De Moivre. Factorisation de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm 1$ et de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm \mathrm{e}^{i\alpha}$. Linéarisation. Transformation de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ en un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Argument d'un nombre complexe non nul. Écriture trigonométrique. Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe. Module et argument. Propriétés.
Résolution d'équations du type $e^z = a$.

Fonctions d'une variable réelle :
Calculs dans $\mathbb{R}$, manipulation d'inégalités. Valeur absolue. Parties majorées, minorées, bornées. Partie entière.
Généralités : domaine de définition, opérations sur les fonctions : somme, produit, quotient, composée. Parité, imparité, périodicité. Monotonie et stricte monotonie. Fonctions majorées, minorées, bornées. Extrema. Représentation graphique : obtention des courbes représentatives de $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(x + x_0)$, $x \mapsto f(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ à partir de la courbe représentative de f.

Questions de cours :

1. Définir $\mathrm{e}^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$.
2. Énoncer les formules d'Euler et la formule de De Moivre.
3. Définir la notion d'arguments d'un nombre complexe non nul, puis la notion d'argument principal. Donner les arguments d'un produit, d'un quotient, du conjugué.
4. À quelles conditions nécessaires et suffisantes deux complexes donnés sous forme algébrique sont-ils égaux ? et pour deux complexes non nuls donnés sous forme trigonométrique ?
5. Énoncer trois caractérisations (une portant sur la forme algébrique, une autre sur le conjugué, et une sur les arguments) pour qu'un complexe soit réel (respectivement imaginaire pur).
6. Définir la partie entière d'un nombre réel.
7. Définir la notion de partie de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée. Définir la notion de maximum ou plus grand élément d'une partie. Énoncer la caractérisation des parties bornées à l'aide de la valeur absolue.
8. Énoncer les manipulations algébriques compatibles avec les inégalités (somme, produit, inverse).
9. Définir la notion de fonction paire, impaire, périodique.
10. Énoncer la propriété de dérivabilité d'une fonction composée, et la formule de sa dérivée.

Savoir-faire

1. Déterminer rapidement une forme trigonométrique d'un nombre complexe z donné par le colleur. En déduire l'ensemble des entiers relatifs n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$.

   Exemple : Donner une forme trigonométrique de $z = 2 - 2i\sqrt{3}$, puis déterminer l'ensemble des entiers relatifs n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$.
2. Mettre en oeuvre la technique de l'angle moitié pour déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe s'exprimant sous la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$.

   Exemple : Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z = 1 + e^{-i\frac{3\pi}{7}}$, puis une forme trigonométrique du nombre complexe $w = e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. Linéariser un produit d'expressions trigonométriques.
4. Déterminer une expression de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
6. Résoudre une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ du type $e^z = a$, où $a \in \mathbb{C}$.
7. Montrer que la partie entière est croissante.
8. Donner le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction donnée par le colleur. Calculer sa fonction dérivée.
9. Soit f une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Énoncer la négation d'une ou plusieurs des assertions suivantes, au choix du colleur :
   1) f est croissante, 2) f est majorée, 3) f est bornée, 4) f est paire, 5) f est périodique.

La colle débutera par une question de cours ET un savoir-faire ET une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents.