Colle 13 : quinzaine du 5 au 18 mai

Espaces vectoriels de dimension finie
Famille de vecteurs : famille libre, famille liée, famille génératrice. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Famille de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés.
Base adaptée à une somme directe. Sous-espaces supplémentaires et concaténation des bases.
Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de base. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Lien entre le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. Dimension. Caractérisation des bases. Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles libres par le rang.
Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sous-espace et cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie. Formule de Grassmann.
Applications linéaires en dimension finie : une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.
Hyperplan : formes linéaires et hyperplans. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $H \oplus D = E$. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

A - Questions de cours :

1. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, et d'une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Énoncer le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.
3. Énoncer la caractérisation des bases en dimension finie.
4. Définir la notion de rang d'une famille de vecteurs. Énoncer la caractérisation de la liberté d'une famille de vecteurs à l'aide du rang.
5. Énoncer la formule de Grassmann.
6. Énoncer 3 façons de montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires ; ces 3 façons doivent explicitement relever du cadre de la dimension finie.
7. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E;F)$. Caractériser l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de u par des propriétés sur l'image par u d'une base de E.
8. Définir la notion de rang d'une application linéaire et énoncer le théorème du rang sous ses deux formes.
9. Énoncer la caractérisation des isomorphismes parmi les applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension.

B - Savoir-faire

1. Déterminer si une famille explicite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(n \leqslant 4)$ est libre ou liée.
2. Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ donnée par le colleur.
3. Mettre en œuvre le théorème de la base extraite sur une famille génératrice fournie par le colleur.
4. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}_3[X]$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par le colleur.
5. Déterminer si deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par équation et par le colleur sont supplémentaires.
6. Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et$G$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents