

Développements limités.

Relations de comparaison pour les suites et les fonctions : relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence. Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances et composition à droite (changement de variable). Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. Équivalents usuels. Obtention d'un équivalent par encadrement.

Développements limités : définition, unicité, troncature, forme normalisée. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient (par composition avec $1/(1+u)$). Composition dans des cas simples. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young (sans démonstration pour l'instant). Développements limités usuels à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, \exp , \cos , \sin , ch , sh , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, où α est un réel. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan et Arctan .

Applications des développements limités : calcul de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptote et étude des positions relatives.

A - Questions de cours :

1. Définir la notion de fonction dominée par une autre au voisinage d'un point.
2. Définir la notion de fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point.
3. Définir la notion de fonctions équivalentes au voisinage d'un point.
4. Développements limités usuels : au choix du colleur, donner deux DL en 0 parmi ceux de \exp , ch , sh , \cos , \sin , $\frac{1}{1\pm x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
5. Équivalents usuels : au choix du colleur, donner trois équivalents usuels en 0 parmi ceux de $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cos(x) - 1$, $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x) - 1$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan , celui de $\sqrt{1+x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
7. Énoncer la formule de Taylor-Young.
8. Énoncer les notions conservées par équivalence : signe et limite.

B - Savoir-faire

1. Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de Arctan en utilisant celui de sa dérivée.
2. Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de Arccos en utilisant celui de sa dérivée.
3. Utiliser un équivalent ou un DL pour lever une forme indéterminée.
4. Utiliser un développement limité pour déterminer l'équation d'une tangente et les positions relatives de la courbe et sa tangente.
5. Utiliser un développement limité pour déterminer l'équation d'une asymptote et les positions relatives de la courbe et son asymptote.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents