Colle 15 : quinzaine du 9 au 22 juin

Probabilités sur un univers fini : expérience aléatoire, univers des possibles, événements. Probabilité sur un univers fini. Équiprobabilité. Probabilité d'une réunion, de l'événement contraire, croissance. Probabilités conditionnelles : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes. Indépendance : couple d'événements indépendants ; famille finie d'événements mutuellement indépendants.

Variables aléatoires sur un univers fini : définition, loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale. Loi image.
Couples de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle. Couple de variables aléatoires indépendantes. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Matrices : matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Formules de changement de bases pour les vecteurs, les endomorphismes et les applications linéaires. Matrices semblables.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, noyau et rang d'une matrice.
Théorème du rang. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Rang de la transposée.

Déterminants : Forme n-linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n ; déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Expression du déterminant en fonction des coordonnées en dimension 2 et 3. Formule de changement de bases pour le déterminant. Caractérisation des bases.
Déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une composée.
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant de l'inverse, déterminant de la transposée.
Calcul pratique : effet des opérations élémentaires, développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.

A - Deux questions de cours parmi :

1. Définir la notion de système complet d'événements. Donner deux exemples de tels systèmes dans un univers fini Ω.
2. Définir la notion de probabilité sur un univers fini. Démonstration des relations $P(\emptyset) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pour deux événements quelconques A et B.
3. Définir la notion de probabilité conditionnelle. Démonstration du fait que c'est une probabilité sur l'univers d'origine.
4. Énoncer la formule des probabilités composées.
5. Énoncer la formule des probabilités totales.
6. Donner la définition des lois uniforme, de Bernoulli et binomiale.
7. Définir la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{C}$ et donner la formule de changement de bases pour les vecteurs.
8. Formules de changement de bases pour les applications linéaires et les endomorphismes.
9. Définir la notion de matrices semblables.
10. Définir l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice. Théorème du rang pour une matrice.
11. CaractérisationS des matrices inversibles. (en donner 6 : par le rang, par le noyau, par l'image, par le déterminant, par l'existence d'un inverse à droite/à gauche)
12. Formule de changement de bases pour le déterminant. Caractérisation des bases à l'aide du déterminant.
13. Comment calcule-t-on le déterminant d'un endomorphisme ?
14. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Donner $\det(\lambda A)$, $\det(A^T)$, $\det(AB)$, et $\det(A^{-1})$ lorsque A est inversible.

B - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents