Colle 3 : semaines du 13 au 19 octobre et du 3 au 9 novembre

Sommes et produits : Coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, et factorisation de $a^n - b^n$.

Nombres complexes : Parties réelle et imaginaire. Conjugaison. Module. Inégalités triangulaires.
Complexes de module 1. Notation $e^{i\theta}$. Formules d'Euler et De Moivre. Factorisation de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm 1$ et de $\mathrm{e}^{i\theta} \pm \mathrm{e}^{i\alpha}$.
Linéarisation. Transformation de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ en un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Argument d'un nombre complexe non nul. Écriture trigonométrique.
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe. Module et argument. Propriétés. Résolution d'équations du type $e^z = a$.
Interpétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$, des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, et de la conjugaison.

Questions de cours :

1. Donner la définition des coefficients binomiaux. Énoncer la formule du triangle de Pascal.
2. Énoncer la formule du binôme de Newton.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, énoncer la formule de factorisation de $a^n - b^n$. Factoriser $a^3 - b^3$ et $a^3 + b^3$.
4. Donner la définition du module et du conjugué d'un nombre complexe. Donner l'expression du module à l'aide du conjugué.
5. Énoncer la première inégalité triangulaire et le cas d'égalité. Énoncer la deuxième inégalité triangulaire.
6. Pour $z \in \mathbb{C}$, exprimer $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ et $|z|$ en fonction de z et $\overline{z}$.
7. Définir $\mathrm{e}^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Énoncer les formules d'Euler et la formule de De Moivre.
8. À quelles conditions nécessaires et suffisantes deux complexes donnés sous forme algébrique sont-ils égaux ? et pour deux complexes non nuls donnés sous forme trigonométrique ?
9. Énoncer trois caractérisations (une portant sur la forme algébrique, une autre sur le conjugué, et une sur les arguments) pour qu'un complexe soit réel (respectivement imaginaire pur).
10. Définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$, donner son module et un de ses arguments.

Savoir-faire

1. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. Écrire un nombre complexe sous forme algébrique ou sous forme exponentielle.
3. Retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$ ou $\sin(p) \pm \sin(q)$ à partir de la factorisation par l'angle moitié de $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$.
4. Linéariser un produit d'expressions trigonométriques.
5. Déterminer une expression de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer
   $$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$
7. Résoudre une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ du type $e^z = a$, où $a \in \mathbb{C}$.

   Exemple : Résoudre l'équation $e^z = -3 - 3i$.

La colle débutera par une question de cours ET un savoir-faire ET une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents.