Colle 6 : quinzaine du 8 au 21 décembre

Calcul de primitives : pour des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Notion de primitives. Primitives usuelles . Primitives des fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$, $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.
Lien entre intégrale et primitive : théorème fondamental du calcul différentiel. Intégration par parties et changement de variable. On ne demande plus de rappeler les hypothèses de régularité pour les applications pratiques.

Équations différentielles linéaires :

- d'ordre 1 : $y' + a(x)y = f(x)$, avec a, f deux fonctions continues sur un intervalle I (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Principe de superposition. Résolution de l'équation homogène associée. Structure de l'ensemble des solutions de l'équation complète. Méthode de variation de la constante. Problème de Cauchy.
- d'ordre 2 : $ay'' + by' + cy = f(x)$, avec a, b, c des réels ou complexes ($a \neq 0$), et f une fonction continue. Principe de superposition. Résolution de l'équation homogène associée. Structure de l'ensemble des solutions de l'équation complète. Recherche d'une solution particulière lorsque f est une fonction polynomiale, ou du type $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ (avec $A, \lambda \in \mathbb{C}$), ou du type $x \mapsto B\cos(\omega x)$, $x \mapsto B\sin(\omega x)$ (avec a, b, c, B, ω réels). Problème de Cauchy.

Question de cours :

1. Énoncer le théorème fondamental du calcul différentiel.
2. Décrire l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier odre du type $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
3. Décrire l'ensemble des solutions à valeurs complexes d'une équation différentielle d'ordre 2 du type
$$ay'' + by' + cy = 0$$
où $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
4. Décrire l'ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle d'ordre 2 du type
$$ay'' + by' + cy = 0$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
5. Donner la définition d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 ou 2. Préciser combien de solutions il admet.
6. Donner la démarche permettant de trouver une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants dont le second membre est du type polynomial, $A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$.

Savoir-faire

1. Déterminer une primitive sur un intervalle I d'une fonction du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ (intervalle et fonction donnés par le colleur).
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction du type $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\omega x)$ (idem).
3. Effectuer une intégration par parties.
4. Effectuer un changement de variables donné par le colleur.
5. Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants donnée par le colleur.

La colle débutera par une question de cours ET un savoir-faire ET une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents.