Feuille d'exercices : Suites réelles et complexes

Exercice 1
Montrer en revenant à la définition de la limite que la suite u de terme général $u_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ converge vers 0, que la suite v de terme général $v_n = \frac{n+2}{n+5}$ converge vers 1, et que la suite w de terme général $w_n = 2^n - 3\cos(n)$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 2
Soit u une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

1. Dans cette question, on suppose que u est convergente. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $|u_n - u_N| < 1$. En déduire que u est stationnaire.
2. Montrer que u est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 3
Soit u une suite réelle.

1. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Est-ce le cas de u ?
2. On suppose les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes de même limite. Montrer que u est convergente.
3. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer que u est convergente.

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Étudier la suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 \leqslant n^2 + 3n < (n+2)^2$, puis étudier la suite $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5
Soit u une suite périodique. Montrer que u est convergente si et seulement si elle est constante.

Exercice 6
À l'aide d'encadrement, déterminer, si elles existent, les limites des suites de terme général u_n dans chaque cas :

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n} \qquad u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \qquad u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! \qquad u_n = \sum_{k=n}^{2n} k\,\mathrm{e}^{-k} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \qquad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

Exercice 7
Le but de cet exercice est de déterminer pour $a > 1$, la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, ainsi que la valeur de sa limite.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer sa limite.
2. En déduire que la suite u est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Justifier que u est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 0$.

Exercice 8
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel k tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.
1) Montrer que si $k < 1$, alors u converge vers 0.
2) Montrer que si $k > 1$, alors u diverge vers $+\infty$.

Exercice 9
Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

Exercice 10
Soit u la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que (u_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.
3. Retrouver la convergence de u en montrant que les suites u et v sont adjacentes, où la suite v est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Exercice 11
On considère la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. La suite u peut-elle être convergente ? A-t-elle une limite ? Si oui, la préciser.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = u_n - \ln n$ et $w_n = u_n - \ln(n+1)$.
   (a) Pour $x > -1$, déterminer le signe de $f(x) = x - \ln(1+x)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ et $w_n - w_{n-1}$ en fonction de f.
   (c) Montrer que les suites v et w sont adjacentes.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 12
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \qquad\qquad v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n \times n!}$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en conclure concernant la suite u ?

Exercice 13
On considère les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; $T_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes.
2. Quel terme de la suite (S_n) permet de fournir une approximation à 10^{-3} près de la limite ℓ de S ?

Exercice 14
On considère la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Montrer que les suites $v = (u_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $w = (u_{2p-1})_{p\geqslant 1}$ sont adjacentes. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 15
Le but de l'exercice est d'étudier la suite u de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+8}{6}$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}^+$, et, pour différentes valeurs de u_0, tracer les premiers termes de la suite u. Former une conjecture quand à la nature de la suite u (monotonie/convergence).
2. Montrer que si u est convergente, alors sa limite est 2 ou 4.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire la nature et la limite éventuelle de la suite u suivant les valeurs de u_0. On pourra distingueur suivant la position de u_0 par rapport à 2 et 4.

Exercice 16
On considère la suite u définie par $u_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, et tracer les premiers termes de la suite u dans le cas où $u_0 = 1$. Que remarque-t-on ?
2. Démontrer que l'équation $\sin(x) = x$ admet une unique solution dans $[0; \frac{\pi}{2}]$. Dresser le tableau de signe de l'expression $\sin(x) - x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Démontrer que la suite u converge et préciser sa limite.

Exercice 17

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique $x_n \in]0; +\infty[$ tel que $\ln(x_n) + x_n = n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est croissante.
3. En déduire qu'elle admet une limite et la déterminer.

Exercice 18
On considère l'équation $(E_n) \quad x^n - x - 1 = 0$ où $n \geqslant 2$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$; on note x_n cette solution.
2. Déterminer, pour $n \geqslant 2$, le signe de $f_n(x_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 19
On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que la suite u admet une limite et la déterminer.
2. Justifier rapidement que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x$.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.
4. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.

Exercice 20

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $\ln(x) = -nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite ainsi définie est monotone.

3. Justifier que u est convergente et déterminer sa limite.
4. Montrer que la suite v de terme général $v_n = nu_n$ admet une limite, et la déterminer.

Exercice 21
On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par les relations

$$x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } n \geqslant 0, \quad x_{n+1} = -\frac{x_n + y_n}{\sqrt{2}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{\sqrt{2}}$$

1. Montrer que la suite de terme général $z_n = x_n + iy_n$ est géométrique. En déduire les expressions de x_n et y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ peuvent-elles converger ?

Exercice 22
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(z_n)_n$ définie par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_{n+1} = \frac{2z_n - \overline{z_n}}{3}$

Exercice 23
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$

1. Montrer que si z_0 est réel, la suite est convergente, et déterminer sa limite.
2. On suppose désormais que z_0 n'est pas réel, et on pose $z_0 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r = |z_0|$ et $\theta \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$. Pour tout entier naturel n, on pose $r_n = |z_n|$ et θ_n est l'argument principal de z_n. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et θ_n.
3. Montrer que la suite de terme général $r_n \sin\theta_n$ est une suite géométrique.
4. Donner l'expression de r_n et θ_n en fonction de r, θ et n.
5. Montrer que la suite z est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 24
Classer par ordre de négligeabilité, lorsque c'est possible, les suites de termes général :
n^2 ; $\ln n$; 10^n ; e^n ; $n^{0,1}$; $\ln^{10} n$; e^{2n} ; $\sqrt{\ln n}$; $\ln n^2$.

Exercice 25
Déterminer les limites des suites de terme général :

$$(1)\ \frac{n^3 + 5n}{2n^3 + \sin(n) + \ln(n)} \qquad (2)\ \frac{n}{2} + (-1)^n\sqrt{n} \qquad (3)\ \sqrt{\ln(n^2+1)} - \sqrt{\ln(n^2-1)} \qquad (4)\ \left(\frac{2^n + 3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(5)\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad (6)\ \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n \qquad (7)\ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad (8)\ \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\ln\frac{1}{n}}$$

Exercice 26
Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \qquad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \qquad n^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad \ln(n+1) - \ln(n) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 27
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $\tan x_n = x_n$.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$. En donner un équivalent simple.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$. Justifier que $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. Quelle est la limite de (y_n) ?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Donner un équivalent simple de (z_n).