Colle 8 : quinzaine du 26 janvier au 8 février

Suites : Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Propriétés des suites convergentes : toute suite convergente est bornée ; si une suite u admet une limite $\ell > 0$, alors $u_n \geqslant \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang. Passage à la limite dans les inégalités larges. Produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0. Opérations sur les limites. Suites extraites. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une même limite ℓ, alors u a pour limite ℓ.
Théorèmes de majoration, minoration, des gendarmes, de la limite monotone, des suites adjacentes. Suites complexes.
Relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence. Comparaison des suites usuelles : $\ln(n)^\beta$, n^α, a^n, $n!$ et n^n. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissance. Propriétés conservées par équivalence : signe et limite. Équivalents usuels.

A - Questions de cours :

1. Définir la notion de limite pour une suite dans les trois cas possibles : limite réelle, égale à $+\infty$, égale à $-\infty$.
2. Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large. Qu'en est-il pour les inégalités strictes ?
3. Comment montrer qu'une suite n'admet pas de limite ? Sur quel résultat s'appuie cette méthode ?
4. Énoncer les théorèmes de majoration et minoration, le théorème des gendarmes.
5. Définir la notion de suites adjacentes et énoncer le théorème les concernant.
6. Énoncer le théorème de la limite monotone.
7. Énoncer les équivalents usuels.
8. Rappeler la caractérisation pratique (avec les quotients) des notions de domination, négligeabilité et équivalence.

B - Savoir-faire

1. Montrer en revenant à la définition qu'une suite donnée par le colleur admet une certaine limite.
2. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
3. Soit $a > 1$. Montrer que $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.
4. Donner un équivalent simple d'une suite donnée par le colleur.
   Exemples : déterminer un équivalent simple des suites de teme général :
   $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \qquad n^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad \ln(n+1) - \ln(n) \qquad \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})$$
5. Déterminer la limite d'une suite donnée par le colleur en utilisant les relations de comparaison.
   Exemples : déterminer la limite des suites de terme général :
   $$\frac{n^3 + 5n}{2n^3 + \sin(n) + \ln(n)} \qquad \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1} \qquad \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} - 1} \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\ln\frac{1}{n}}$$

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents