

Espaces vectoriels : Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel. Exemples de références : \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, \mathbb{K}^Ω , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Sous-espaces vectoriels, caractérisation. Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Applications linéaires : applications linéaires, endomorphismes. Opération : combinaison linéaire et composée. Image directe d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité.

Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs et symétries ; caractérisation des projecteurs et des symétries. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

A - Questions de cours :

1. Énoncer la caractérisation de la notion de sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et e_1, \dots, e_p des vecteurs de E . Définir le sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_1, \dots, e_p) . Énoncer sa caractérisation en terme de plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs e_1, \dots, e_p .
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Définir la somme de F et G . Quand dit-on que cette somme est directe ? Quand dit-on que F et G sont supplémentaires ?
4. Définir la notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels, ainsi que les notions d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme.
5. Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition du noyau et de l'image de u .
6. Définir la notion d'équation linéaire. Donner la structure de l'ensemble de ses solutions.
7. Définir la notion de projecteur d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Caractériser les projecteurs de E .
8. Définir la notion de symétrie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Caractériser les symétries de E .

B - Savoir-faire

1. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Prouver que u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .
3. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Montrer que $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u \circ u)$ et que $\text{Im}(u \circ u) \subset \text{Im}(u)$.
5. Décrire comme un sous-espace vectoriel engendré le noyau d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par le colleur.
6. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'image d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par le colleur.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents