Colle 13 : semaine du 18 au 24 mai

Ensembles finis et dénombrement : Cardinal d'un ensemble fini, d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Applications entre ensembles finis. Opérations sur les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire, produit cartésien. Listes et combinaison. Si E et F sont deux ensembles finis, cardinal de F^E, de $\mathcal{P}(E)$, nombre d'injections de E dans F, nombre de permutations de E, nombre de parties à p éléments de E.

Espaces vectoriels de dimension finie
Famille de vecteurs : famille libre, famille liée, famille génératrice. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Famille de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés.
Base adaptée à une somme directe. Sous-espaces supplémentaires et concaténation des bases.
Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de base. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Lien entre le cardinal d'une famille libre et celui d'une famille génératrice. Dimension. Caractérisation des bases. Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles libres par le rang.
Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sous-espace et cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire. Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie. Formule de Grassmann.
Applications linéaires en dimension finie : une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.
Hyperplan : formes linéaires et hyperplans. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $H \oplus D = E$. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

A - Questions de cours :

1. Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, du complémentaire, d'un produit cartésien.
2. Que peut-on dire d'une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal ? d'une application surjective ?
3. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, et d'une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. Énoncer le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.
5. Définir la notion d'espace vectoriel de dimension finie, et la notion de dimension d'un tel espace vectoriel.
6. Énoncer la caractérisation des bases en dimension finie.
7. Définir la notion de rang d'une famille de vecteurs. Énoncer la caractérisation de la liberté d'une famille de vecteurs à l'aide du rang.
8. Énoncer la formule de Grassmann.
9. Énoncer 3 façons de montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires ; ces 3 façons doivent explicitement relever du cadre de la dimension finie.
10. Définir la notion de rang d'une application linéaire et énoncer le théorème du rang sous ses deux formes.

B - Savoir-faire

1. Dénombrer le nombre d'applications entre deux ensembles finis E et F, puis le nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis E et F.
2. Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble fini E.
3. Démonstration combinatoire de la formule du triangle de Pascal.
4. Déterminer si une famille explicite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(n \leqslant 4)$ est libre ou liée.
5. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
6. Mettre en œuvre le théorème de la base extraite sur une famille génératrice fournie par le colleur.
7. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}_3[X]$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par le colleur.
8. Déterminer si deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par équation et par le colleur sont supplémentaires.
9. Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ donnée par le colleur.

C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents