

**Applications linéaires en dimension finie :** une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

**Hyperplan :** formes linéaires et hyperplans. Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $H \oplus D = E$ . Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

### Développements limités.

Relations de comparaison pour les suites et les fonctions : relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence. Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances et composition à droite (changement de variable). Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. Équivalents usuels. Obtention d'un équivalent par encadrement.

Développements limités : définition, unicité, troncature, forme normalisée. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient (par composition avec  $1/(1+u)$ ). Composition dans des cas simples. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young (sans démonstration pour l'instant). Développements limités usuels à tout ordre en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ , où  $\alpha$  est un réel. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan$  et  $\operatorname{Arctan}$ .

Applications des développements limités : calcul de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptote et étude des positions relatives.

### A - Questions de cours :

- Définir la notion de rang d'une application linéaire et énoncer le théorème du rang sous ses deux formes.
- Développements limités usuels : au choix du colleur, donner deux DL en 0 parmi ceux de  $\exp$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\frac{1}{1 \pm x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ .
- Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan$ , celui de  $\sqrt{1+x}$  et de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .
- Énoncer la formule de Taylor-Young.

### B - Savoir-faire

- Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  donnée par le colleur.
- Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{Arctan}$  en utilisant celui de sa dérivée.
- Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{Arccos}$  en utilisant celui de sa dérivée.
- Utiliser un équivalent ou un DL pour lever une forme indéterminée.
- Utiliser un développement limité pour déterminer l'équation d'une tangente et les positions relatives de la courbe et sa tangente.
- Utiliser un développement limité pour déterminer l'équation d'une asymptote et les positions relatives de la courbe et son asymptote.

### C - une question de cours ou un savoir-faire d'un des programmes précédents