Programme n$^{\text{o}}$ 2

Semaine du 22/09/2025

Contenu du cours :

- Chapitre 1 (reprise du programme précédent)
- Chapitre 2 : Équations et inéquations
  - Résolution de petits systèmes linéaires à 2 ou 3 inconnues par la méthode du pivot. Dans le cas où le système possède une infinité de solutions, écriture de l'ensemble des solutions sous forme paramétrique. Exemples de systèmes à paramètre.
  - Propriétés usuelles de $\leqslant$. Compatibilité avec l'addition et la multiplication (attention aux signes pour la multiplication). Passage à l'inverse.
  - Résolution d'inéquations avec un tableau de signes.
  - Fonctions polynomiales de degré 2. Mise sous forme canonique, racines, signe, abscisse du sommet de la parabole.
  - Fonctions croissantes, strictement croissantes, décroissantes, strictement décroissantes.
  - Intervalles et intersection d'intervalles.
  - Valeur absolue. Éliminer les valeurs absolues d'une expression (en distinguant des cas). Inégalité triangulaire (et son cas d'égalité) et seconde inégalité triangulaire. Résolution d'une équation ou d'une inéquation contenant une valeur absolue.
  - Parties de $\mathbf{R}$ majorées, minorées, bornées. Maximum, minimum. Partie entière d'un réel x : définition, graphe, caractérisation comme l'unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $0 + 1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (Démonstration par récurrence)
- Écrire une assertion avec des quantificateurs et des connecteurs (non, et, oui, implication, équivalence), puis écrire sa négation.
- Soient D une partie de $\mathbf{R}$ et $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction. Donner la définition de « f est croissante sur D ».
- Soient D une partie de $\mathbf{R}$ et $f : D \to \mathbf{R}$ une fonction. Donner la définition de « f est strictement décroissante sur D ».
- Montrer que $\forall x > 0, \forall y > 0, \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
- Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. On précisera les coordonnées du sommet de la parabole.
- Définition de la valeur absolue d'un réel x comme $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Pour $\varepsilon \geqslant 0$, démontrer que $|x| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
- Énoncer et démontrer de l'inégalité triangulaire.
- Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. Démontrer que A est bornée si et seulement si $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leqslant M$.
- Montrer que, pour $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.