# Programme n$^{\mathrm{o}}$ 3

Semaine du 29/09/2025

**Contenu du cours :**

- Chapitre 2 : Équations et inéquations
  - Valeur absolue. Éliminer les valeurs absolues d'une expression (en distinguant des cas). Inégalité triangulaire (et son cas d'égalité) et seconde inégalité triangulaire. Résolution d'une équation ou d'une inéquation contenant une valeur absolue.
  - Parties de $\mathbf{R}$ majorées, minorées, bornées. Maximum, minimum. Partie entière d'un réel $x$ : définition, graphe, caractérisation comme l'unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
- Chapitre 3 : Fonctions usuelles
  - Fonction exponentielle, définie comme l'unique fonction dérivable telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$ (existence admise). Graphe. Propriétés de calcul. Inégalité $\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) \geqslant 1 + x$ et interprétation géométrique.
  - Fonction logarithme népérien ln, définie comme la bijection réciproque de $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$. Dérivée. Graphe. Propriétés de calcul. Inégalités $\forall y > 0, \ln(y) \leqslant -1 + y$ et $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$, et interprétation géométrique. Pour $a > 0$ différent de 1, logarithme en base $a$ ; le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $d$ est $\lfloor \log_{10}(d) \rfloor + 1$.
  - Fonctions paires, fonctions impaires. Interprétation géométrique.
  - Fonctions puissances : définition et domaine de définition quand l'exposant est entier naturel, entier relatif, réel. Dérivée. Positions relatives des graphes pour différentes valeurs de l'exposant. Propriétés de calcul.
  - Théorème des croissances comparées : $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Généralisation : pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, on a $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $|x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $\dfrac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x^\beta \ln^\gamma(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Exemples de calculs de limites (factorisation par le terme dominant, règle pour la limite d'une composée, méthode de la quantité conjuguée). On pourra utiliser des expressions du type « au voisinage de $+\infty$ » sans se préoccuper (pour le moment) de leur sens exact.

**Liste des questions et exercices de cours :**

- Définition de la valeur absolue d'un réel $x$ comme $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Pour $\varepsilon \geqslant 0$, démontrer que $|x| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
- Soit $A$ une partie non vide de $\mathbf{R}$. Montrer que $A$ est bornée si et seulement si $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leqslant M$.
- Montrer que $\forall k \geqslant 2, \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.
- Montrer que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$.
- Pour $x \in \mathbf{R}$, simplifier $e^{-2\ln(1+x^2)}\sqrt{1+x^2}$.
- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non entier. Donner la définition et le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$. À quelle condition $f$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? À quelle condition le prolongement est-il dérivable en 0 ?
- Représenter sur un même dessin les cinq fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^{1/2}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ (sur $\mathbf{R}_+$).
- Calculer l'une des limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x - \ln^2(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln\big(\ln(x)\big)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{2+x}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{2+x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.