Programme n$^{\text{o}}$ 4

Semaine du 06/10/2025

Contenu du cours :

- Chapitre 3 : Fonctions usuelles
  - Fonction exponentielle, définie comme l'unique fonction dérivable telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$ (existence admise). Graphe. Propriétés de calcul. Inégalité $\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) \geqslant 1 + x$ et interprétation géométrique.
  - Fonction logarithme népérien ln, définie comme la bijection réciproque de $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$. Dérivée. Graphe. Propriétés de calcul. Inégalités $\forall y > 0, \ln(y) \leqslant -1 + y$ et $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leqslant x$, et interprétation géométrique. Pour $a > 0$ différent de 1, logarithme en base a ; le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier d est $\lfloor \log_{10}(d) \rfloor + 1$.
  - Fonctions paires, fonctions impaires. Interprétation géométrique.
  - Fonctions puissances : définition et domaine de définition quand l'exposant est entier naturel, entier relatif, réel. Dérivée. Positions relatives des graphes pour différentes valeurs de l'exposant. Propriétés de calcul.
  - Théorème des croissances comparées : $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. Généralisation : pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, on a $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $|x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $\dfrac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x^\beta \ln^\gamma(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. Exemples de calculs de limites (factorisation par le terme dominant, règle pour la limite d'une composée, méthode de la quantité conjuguée). On pourra utiliser des expressions du type « au voisinage de $+\infty$ » sans se préoccuper (pour le moment) de leur sens exact.
  - Fonctions cosinus et sinus. $\dfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow[h\to0]{} 1$. Dérivée. Graphe. Formules de symétrie ($\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, etc), à savoir retrouver géométriquement. Formules d'addition et de duplication. Formules de linéarisation. Formules de Simpson (parfois appelées « de délinéarisation »).
  - Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques (en s'aidant du cercle).
  - Fonction tangente et son domaine de définition. Dérivée. Graphe. Formules d'addition.
  - Fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. Domaine de définition et domaine d'arrivée de ces fonctions. Graphe. Dérivée. Formule pour $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
  - Fonctions ch et sh. Graphe. Dérivée. Formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non entier. Donner la définition et le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$. À quelle condition f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? À quelle condition le prolongement est-il dérivable en 0 ?
- Représenter sur un même dessin les cinq fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^{1/2}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ (sur $\mathbf{R}_+$).
- Calculer l'une des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x - \ln^2(x)}$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) \ln\Big(\ln(x)\Big)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{2+x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{2+x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.
- Énoncer et démontrer (à partir des formules d'addition) la formule de linéarisation pour $\sin(a)\sin(b)$.
- Donner le domaine de définition et le domaine d'arrivée de la fonction Arcsin (ou Arccos, ou Arctan) et tracer son graphe.
- Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Rappeler la définition des fonctions ch et sh, puis montrer que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.
- Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ de deux façons différentes.
- Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \cos\Big(\operatorname{Arctan}(x)\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin\Big(\operatorname{Arctan}(x)\Big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.