Programme n° 5

Semaine du 13/10/2025

Contenu du cours :

- Chapitre 3 : Fonctions usuelles
  - Fonctions cosinus et sinus. $\dfrac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$. Dérivée. Graphe. Formules de symétrie ($\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, etc), à savoir retrouver géométriquement. Formules d'addition et de duplication. Formules de linéarisation. Formules de Simpson (parfois appelées « de délinéarisation »).
  - Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques (en s'aidant du cercle).
  - Fonction tangente et son domaine de définition. Dérivée. Graphe. Formules d'addition.
  - Fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. Domaine de définition et domaine d'arrivée de ces fonctions. Graphe. Dérivée. Formule pour $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
  - Fonctions ch et sh. Graphe. Dérivée. Formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.
- Chapitre 4 : Nombres complexes I
  - Forme algébrique d'un nombre complexe, partie réelle et partie imaginaire. Méthode pour trouver la forme algébrique d'un quotient.
  - Affixe complexe d'un point du plan ou d'un vecteur du plan. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Affixe de la somme de deux vecteurs. Affixe du milieu d'un segment.
  - Conjugué d'un nombre complexe, interprétation géométrique. Propriétés de calcul. Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
  - Module d'un nombre complexe. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$. Propriétés de calcul. Cercles et disques.
  - Inégalité triangulaire complexe.
  - Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Propriétés de calcul. Formules d'Euler. **Pas d'utilisation de la formule de Moivre ou de linéarisation à l'aide des formules d'Euler cette semaine.**
  - Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul, coordonnées polaires. Méthode pour mettre un nombre complexe sous forme exponentielle. Pour $z = a + ib$ avec a et b réels, un argument est donné par $\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$ et par $\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a < 0$. Argument principal, défini comme l'unique argument dans $]-\pi, \pi]$.
  - Factorisation par l'angle moitié. Application pour retrouver des formules de trigonométrie (transformation des sommes en produits, etc).
  - **Éviter les exercices de géométrie dans ce chapitre (qui viendront dans un chapitre prochain), mais il faut quand même connaître les interprétations géométriques, notamment pour les points du cercle trigonométrique.**

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer et démontrer (à partir des formules d'addition) la formule de linéarisation pour $\sin(a)\sin(b)$.
- Donner le domaine de définition et le domaine d'arrivée de la fonction Arcsin (ou Arccos, ou Arctan) et tracer son graphe.
- Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Rappeler la définition des fonctions ch et sh, puis montrer que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.
- Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux façons différentes.
- Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \cos\Big(\operatorname{Arctan}(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin\Big(\operatorname{Arctan}(x)\Big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.
- Calcul de la forme algébrique d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes.
- Démontrer que, pour z et z' dans $\mathbf{C}$, on a $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
- Démontrer que, pour z et z' dans $\mathbf{C}$, on a $|zz'| = |z||z'|$.
- Démontrer que, pour $z \in \mathbf{C}^*$, on a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- Énoncer et démontrer les formules d'Euler.