Programme n° 6

Semaine du 03/11/2025

Contenu du cours :

- Chapitre 4 : Nombres complexes I
  - Forme algébrique d'un nombre complexe, partie réelle et partie imaginaire. Méthode pour trouver la forme algébrique d'un quotient.
  - Affixe complexe d'un point du plan ou d'un vecteur du plan. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Affixe de la somme de deux vecteurs. Affixe du milieu d'un segment.
  - Conjugué d'un nombre complexe, interprétation géométrique. Propriétés de calcul. Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
  - Module d'un nombre complexe. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$. Propriétés de calcul. Cercles et disques.
  - Inégalité triangulaire complexe.
  - Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Propriétés de calcul. Formules d'Euler. Formule de Moivre. **<u>Nouveau</u> :** Application à la linéarisation d'expressions trigonométriques et à l'expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
  - Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul, coordonnées polaires. Méthode pour mettre un nombre complexe sous forme exponentielle. Pour $z = a + ib$ avec a et b réels, un argument est donné par $\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$ et par $\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a < 0$. Argument principal, défini comme l'unique argument dans $]-\pi, \pi]$.
  - Factorisation par l'angle moitié. Application pour retrouver des formules de trigonométrie (transformation des sommes en produits, etc).
  - **<u>Nouveau</u> :** Exponentielle d'un nombre complexe.
  - **Éviter les exercices de géométrie dans ce chapitre (qui viendront dans un chapitre prochain), mais il faut quand même connaître les interprétations géométriques, notamment pour les points du cercle trigonométrique.**
- Chapitre 5 : Calculs algébriques
  - Symboles $\sum$ et $\prod$. Propriétés de calcul. Changement d'indice. Télescopage.
  - Somme des entiers, des carrés, des cubes. Somme des termes d'une suite géométrique. Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
  - Coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$ pour $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$, défini comme $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$, et 0 sinon. Formule du triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton. **Pas d'interprétation combinatoire dans ce chapitre.**

Liste des questions et exercices de cours :

- Calcul de la forme algébrique d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes.
- Démontrer que, pour z et z' dans $\mathbf{C}$, on a $\overline{zz'} = \overline{z}\ \overline{z'}$.
- Démontrer que, pour z et z' dans $\mathbf{C}$, on a $|zz'| = |z||z'|$.
- Démontrer que, pour $z \in \mathbf{C}^*$, on a $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
- Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
- Soit $x \in \mathbf{R}$. Linéariser $\cos^3(x)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que le produit des entiers impairs de 1 à $2n+1$ est $\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
- Énoncer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.
- Soient a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbf{N}$. Factoriser $a^{n+1} - b^{n+1}$ et $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.
- Énoncer la formule définissant les coefficients binomiaux. Calcul d'un « petit » coefficient binomial.
- Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer la formule du binôme de Newton. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.