

## Programme n° 7

Semaine du 10/11/2025

### Contenu du cours :

- Chapitre 5 : Calculs algébriques
  - Symboles  $\sum$  et  $\prod$ . Propriétés de calcul. Changement d'indice. Télescopage.
  - Somme des entiers, des carrés, des cubes. Somme des termes d'une suite géométrique. Factorisation de  $a^{n+1} - b^{n+1}$ .
  - Coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  pour  $k \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{N}$ , défini comme  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  si  $0 \leq k \leq n$ , et 0 sinon. Formule du triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton. **Pas d'interprétation combinatoire dans ce chapitre.**
  - Sommes doubles et interversion des symboles  $\sum$  (cas « rectangulaire », cas « triangulaire »).
- Chapitre 6 : Fonctions d'une variable réelle
  - Domaine de définition. Graphe d'une fonction.
  - Opérations usuelles sur les fonctions (somme, produit, quotient, composée). Transformations élémentaires sur les graphes (graphe de  $x \mapsto f(x) + c$ , etc). Fonctions paires, fonctions impaires et fonctions périodiques; interprétation sur le graphe; utilisation pour proposer un intervalle d'étude.
  - Monotonie. Fonctions minorées, majorées, bornées.
  - Techniques « classiques » de calculs de limites (terme dominant, croissances comparées, quantité conjuguée, taux d'accroissement). Asymptotes verticales, asymptotes obliques.
  - Calculs de dérivées. Dérivées des fonctions usuelles. Équation de la tangente en un point. Tableau de variation. Extrema locaux.
  - **Éviter les questions trop théoriques : il s'agit surtout d'un chapitre de calcul. L'étude de la dérivabilité en un point problématique n'est pas un attendu du chapitre, mais elle peut quand même être demandée dans un cas simple.**

### Liste des questions et exercices de cours :

- Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que le produit des entiers impairs de 1 à  $2n + 1$  est  $\frac{(2n + 1)!}{2^n n!}$ .
- Énoncer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.
- Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes, et  $n \in \mathbf{N}$ . Factoriser  $a^{n+1} - b^{n+1}$  et  $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ .
- Énoncer la formule définissant les coefficients binomiaux. Calcul d'un « petit » coefficient binomial.
- Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer la formule du binôme de Newton. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .
- Montrer que, pour  $1 \leq k \leq n$ , on a  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ . En déduire que  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$ .
- Soit  $n \geq 1$ . Calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$ .
- Montrer que la fonction « racine carrée » est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  mais pas en 0.
- Calcul d'une équation de la tangente en un point d'une fonction « simple ».
- Déterminer si les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2$  et  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.