Programme n° 12

Semaine du 15/12/2025

Contenu du cours :

- Chapitre 8 : Nombres complexes II
  - Racines n-èmes de l'unité : définition, formule, représentation graphique. Nombres j et $\overline{j} = j^2$. Racines n-èmes d'un nombre complexe.
  - Interprétation géométrique de $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \lambda z$ (avec $\lambda \in \mathbf{R}$), $z \mapsto e^{i\theta} z$ et $z \mapsto \overline{z}$.
  - Si $A \neq B$ et $C \neq D$ ont pour affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D alors $\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$. Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux droites, condition d'alignement de trois points.
- Chapitre 9 : Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2
  - Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL (quel que soit son ordre). Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL homogène (quel que soit son ordre).
  - Ordre 1 : résolution de l'équation homogène associée.
  - Ordre 1 : recherche d'une solution particulière de l'équation complète. Recherche en « devinant » la forme d'une solution. Principe de superposition ; application au cas des équations de la forme $y' + a(t)y = \cos(\omega t)$, etc, en passant par l'équation complexifiée. Variation de la constante.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire à l'ordre 1.
  - Ordre 2 à coefficients constants : résolution de l'équation homogène associée. Équation caractéristique ; différents cas, suivant le nombre de racines ; cas particulier d'un oscillateur harmonique.
  - Ordre 2 : recherche d'une solution particulière quand le second membre est polynomial ou de la forme $Ce^{\lambda t}$ (savoir traiter les cas où λ est racine simple ou racine double de l'équation caractéristique). Principe de superposition ; cas d'un second membre en cos ou sin, en passant par l'équation complexifiée.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire à l'ordre 2 et à coefficients constants.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer le théorème des racines n-èmes de l'unité. Les représenter pour $n = 6$.
- Soit $n \geqslant 2$. Calculer la somme et le produit des racines n-èmes de l'unité.
- Énoncer la formule donnant une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$.
- Énoncer une condition de parallélisme de deux droites (AB) et (CD).
- Énoncer une condition de perpendicularité de deux droites (AB) et (CD).
- Soient $(E) : y' + a(t)y = f(t)$ une EDL d'ordre 1, et $(H) : y' + a(t)y = 0$ l'équation homogène associée. On suppose que l'on connaît une solution y_P de (E). Montrer qu'une fonction dérivable $y : I \to \mathbf{K}$ est solution de (E) si et seulement s'il existe une solution y_H de (H) telle que $y = y_P + y_H$. (On pourra se contenter de démontrer une seule implication.)
- Résoudre l'équation $(E) : y' - y = \cos(t)$ en passant par les complexes.
- Résoudre les équations $(E_1) : y' - 2y = e^t$ et $(E_2) : y' - 2y = e^{2t}$.
- Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Montrer que si $r \in \mathbf{K}$ est racine double de l'équation caractéristique alors la fonction $v : t \mapsto te^{rt}$ (à valeurs dans $\mathbf{K}$) est une solution de (H).
- Soit $r \in \mathbf{K}$. Montrer que la fonction $u : t \mapsto e^{rt}$ est solution de $y'' + by' + cy = 0$ si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique $x^2 + bx + c = 0$.
- Soit $r \in \mathbf{K}$. Montrer que si r est racine double de l'équation caractéristique $x^2 + bx + c = 0$ alors la fonction $v : t \mapsto te^{rt}$ est solution de $y'' + by' + cy = 0$.
- Résolution d'un problème de Cauchy « simple ».