Programme n° 13

Semaine du 05/01/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 9 : Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2
  - (Programme précédent sur les EDL d'ordre 1.)
  - Ordre 2 à coefficients constants : résolution de l'équation homogène associée. Équation caractéristique ; différents cas, suivant le nombre de racines ; cas particulier d'un oscillateur harmonique.
  - Ordre 2 : recherche d'une solution particulière quand le second membre est polynomial ou de la forme $Ce^{\lambda t}$ (savoir traiter les cas où λ est racine simple ou racine double de l'équation caractéristique). Principe de superposition ; cas d'un second membre en cos ou sin, en passant par l'équation complexifiée.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire à l'ordre 2 et à coefficients constants.
- Chapitre 10 : Géométrie du plan et de l'espace
  - Combinaisons linéaires de vecteurs du plan ou de l'espace, ou d'éléments de $\mathbf{R}^n$; notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_r})$; écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène sous forme de Vect. Droite vectorielle engendrée par un vecteur ; droite affine passant par un point et dirigée par un vecteur ; plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires ; plan affine passant par un point et dirigé par deux vecteurs.
  - Coordonnées d'un vecteur dans une base du plan ou de l'espace ; coordonnées d'un point dans un repère. Dans le plan, projection sur une droite vectorielle parallèlement à une autre. Exemples de calcul de « changement de base » sur les coordonnées, en passant par l'expression des vecteurs d'une base comme combinaisons linéaires des vecteurs de l'autre base.
  - Produit scalaire « usuel » de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, défini comme $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle entre les deux vecteurs. Le projeté orthogonal $p(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur la droite $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est donné par $\dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} \overrightarrow{u}$ (adaptation pour déterminer le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (AB) en calculant le vecteur $\overrightarrow{AH}$) ; le symétrique orthogonal est $s(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$. Base orthogonale, base orthonormée ; expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.
  - Déterminant de deux vecteurs du plan relativement à une base $\mathcal{B}$, défini comme l'aire algébrique d'un parallélogramme exprimée dans l'unité d'aire définie par $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée du plan alors $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \sin(\theta)$. Expression en fonction des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$; notation $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ et formule. Déterminant de trois vecteurs de l'espace relativement à une base ; notation $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$. Propriétés usuelles du déterminant dans le plan et dans l'espace : antisymétrie, caractère alterné, linéarité par rapport à chaque variable. Calcul d'un déterminant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ; développement par rapport à une ligne ou à une colonne.

    Remarque : Cette semaine nous n'aurons pas encore fait beaucoup d'exercices sur le déterminant, en particulier sur des calculs de déterminants de taille 3.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soit $r \in \mathbf{K}$. Montrer que la fonction $u : t \mapsto e^{rt}$ est solution de $y'' + by' + cy = 0$ si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique $x^2 + bx + c = 0$.
- Soit $r \in \mathbf{K}$. Montrer que si r est racine double de l'équation caractéristique $x^2+bx+c = 0$ alors la fonction $v : t \mapsto te^{rt}$ est solution de $y'' + by' + cy = 0$.
- Résolution d'un problème de Cauchy simple.
- Donner la définition des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ du plan dans une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Détermination des coordonnées sur un exemple simple.
- Énoncer la formule du projeté orthogonal d'un vecteur sur la droite engendrée par un vecteur non nul. Effectuer le calcul sur un exemple.
- Écrire l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } x - 2y + z = 0\}$ sous forme de Vect.
- Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base du plan. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Déterminer le projeté de $\overrightarrow{w}$ sur $D_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ parallèlement à $D_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$ puis le symétrique de $\overrightarrow{w}$ par rapport à D_1 parallèlement à D_2.
- Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit $M \neq O$ un point, de coordonnées polaires (r, θ). Déterminer les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ des uniques vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ tels que $\overrightarrow{e_r}$ soit unitaire et de même direction et même sens que $\overrightarrow{OM}$, et que $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ soit une base orthonormée directe du plan. Quelles sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$?