Programme n$^{\text{o}}$ 15

Semaine du 19/01/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 11 : Ensembles
  - Vocabulaire de base sur les ensembles (élément, appartenance, sous-ensemble, inclusion, ensemble des parties, etc). Montrer une égalité de deux ensembles par double inclusion.
  - Propriétés usuelles de l'union et de l'intersection.
  - Recouvrement disjoint, partition.
  - Complémentaire, lois de Morgan.
  - Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- Chapitre 12 : Ensembles de nombres
  - Majorant, minorant, maximum, minimum. Toute partie non vide et finie de $\mathbf{R}$ possède un maximum et un minimum. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{Z}$ possède un maximum (resp. un minimum). Partie entière d'un réel.
  - Nombres décimaux. Approximation décimale d'un réel. L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$: pour tous réels $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient un décimal.
  - Nombres rationnels, irrationnels. Les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.
  - Borne supérieure, borne inférieure. Cas des intervalles. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure). Caractérisation séquentielle de la borne supérieure et de la borne inférieure : pour toute partie non vide et majorée (resp. minorée) A de $\mathbf{R}$ et tout réel α, les assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\alpha = \inf(A)$) ;
    (ii) α est un majorant (resp. un minorant) de A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers α.

Liste des questions et exercices de cours :

- Distributivité de l'intersection sur la réunion : montrer que pour tous ensembles A, B et C, on a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Montrer que les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 2, t + 1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ sont égaux.
- Montrer que si E est un ensemble à 3 éléments alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble à 8 éléments.
- Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 1} \left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}\right]$.
- Soient $A = [1, 4]$, $B = [3, 6]$ et $C = [2, 5]$. Déterminer $A \cup C$ et $\mathbf{R} \setminus B$. Dans un repère orthonormé, représenter $(\mathbf{R} \setminus B) \times (A \cup B)$.
- Que peut-on dire de la somme de deux rationnels ? De deux irrationnels ? D'un rationnel et d'un irrationnel ?
- Donner la définition de la borne supérieure d'une partie de $\mathbf{R}$, puis énoncer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
- Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $A = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^*, p \in \mathbf{N}^* \right\}$.
- Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $B = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^* \right\}$.
- Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, et $\lambda > 0$. On pose $B = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que $\sup(B) = \lambda \sup(A)$.