Programme n$^{\text{o}}$ 16

Semaine du 26/01/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 12 : Ensembles de nombres
  - Majorant, minorant, maximum, minimum. Toute partie non vide et finie de $\mathbf{R}$ possède un maximum et un minimum. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{Z}$ possède un maximum (resp. un minimum). Partie entière d'un réel.
  - Nombres décimaux. Approximation décimale d'un réel. L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$: pour tous réels $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient un décimal.
  - Nombres rationnels, irrationnels. Les ensembles $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.
  - Borne supérieure, borne inférieure. Cas des intervalles. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure). Caractérisation séquentielle de la borne supérieure et de la borne inférieure : pour toute partie non vide et majorée (resp. minorée) A de $\mathbf{R}$ et tout réel α, les assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\alpha = \inf(A)$) ;
    (ii) α est un majorant (resp. un minorant) de A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers α.
- Chapitre 13 : Suites numériques
  - Suites monotones. Suites stationnaires. Suites majorées / minorées / bornées.
  - Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques. Méthode pour trouver l'expression du terme général. Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (homogène à coefficients constants).
  - Définition de la limite (si elle existe). Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites. Limite d'une suite géométrique (si elle existe).
  - Suites extraites. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbf{K}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
  - Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes.
  - **Cette semaine, pas d'étude générale de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.**

Liste des questions et exercices de cours :

- Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $A = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^*, p \in \mathbf{N}^* \right\}$.
- Calculer la borne supérieure et la borne inférieure de $B = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^* \right\}$.
- Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, et $\lambda > 0$. On pose $B = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que $\sup(B) = \lambda \sup(A)$.
- Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{K}$ » (pour une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$). Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ » (pour une suite à valeurs réelles).
- Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes.
- Donner la définition de suites adjacentes, et énoncer le théorème.
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{K}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbf{K}$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. Montrer que si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{K}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et sa limite est ℓ.