Programme n° 17

Semaine du 02/02/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 13 : Suites numériques
  - Suites monotones. Suites stationnaires. Suites majorées / minorées / bornées.
  - Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques. Méthode pour trouver l'expression du terme général. Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (homogène à coefficients constants).
  - Définition de la limite (si elle existe). Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites. Limite d'une suite géométrique (si elle existe).
  - Suites extraites. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbf{K}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
  - Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes.
  - Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalles stables par f. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.
  - Utilisation du TVI / du tableau de variation pour l'étude d'une suite définie implicitement par une équation du type $f_n(x) = 0$.
- Chapitre 14 : Applications
  - Application entre deux ensembles non vides. Image d'un élément de l'ensemble de départ. Antécédents d'un élément de l'ensemble d'arrivée. Composée. Restriction, prolongement.
  - Fonction indicatrice d'un sous-ensemble. Formule pour l'indicatrice du complémentaire, de l'intersection de deux sous-ensembles et de la réunion de deux sous-ensembles.
  - Image directe et image réciproque. Pour une application $f : E \to F$, propriétés de l'image directe et de l'image réciproque vis-à-vis de la réunion et de l'intersection : pour tous sous ensembles A et B de l'ensemble de départ E, on a $f(A\cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; pour tous sous-ensembles A et B de l'ensemble d'arrivée F, on a $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  - Utilisation du TVI / du tableau de variation pour déterminer l'image directe d'un intervalle par une fonction continue monotone. Pour les fonctions usuelles, détermination d'une image directe ou d'une image réciproque par lecture graphique.
  - Injectivité, surjectivité, bijectivité. La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) l'est aussi. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$; dans ce cas, $g = f^{-1}$. Bijection réciproque d'une composée.

Liste des questions et exercices de cours :

- Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{K}$ » (pour une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$). Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ » (pour une suite à valeurs réelles).
- Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes.
- Donner la définition de suites adjacentes, et énoncer le théorème.
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{K}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbf{K}$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. Montrer que si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{K}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et sa limite est ℓ.
- Montrer que la suite de terme général $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n^2+k}$ converge.
- Soit $x \in \mathbf{K}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ converge vers 0.
- Énoncer et démontrer les propriétés de l'image directe vis-à-vis de la réunion et de l'intersection.
- Énoncer et démontrer les propriétés de l'image réciproque vis-à-vis de la réunion et de l'intersection.
- Soient $f : E \to F$ une application, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F. Montrer que $f(A) \cap B = f\Big(A \cap f^{-1}(B)\Big)$.
- Donner la définition (avec des quantificateurs) de l'injectivité et de la surjectivité. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
- Donner la définition (avec des quantificateurs) de l'injectivité et de la surjectivité. Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.