

Programme n° 18

Semaine du 09/02/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 14 : Applications
 - Application entre deux ensembles non vides. Image d'un élément de l'ensemble de départ. Antécédents d'un élément de l'ensemble d'arrivée. Composée. Restriction, prolongement.
 - Fonction indicatrice d'un sous-ensemble. Formule pour l'indicatrice du complémentaire, de l'intersection de deux sous-ensembles et de la réunion de deux sous-ensembles.
 - Image directe et image réciproque. Pour une application $f : E \rightarrow F$, propriétés de l'image directe et de l'image réciproque vis-à-vis de la réunion et de l'intersection : pour tous sous ensembles A et B de l'ensemble de départ E , on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; pour tous sous-ensembles A et B de l'ensemble d'arrivée F , on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
 - Utilisation du TVI / du tableau de variation pour déterminer l'image directe d'un intervalle par une fonction continue monotone. Pour les fonctions usuelles, détermination d'une image directe ou d'une image réciproque par lecture graphique.
 - Injectivité, surjectivité, bijectivité. La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) l'est aussi. Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$; dans ce cas, $g = f^{-1}$. Bijection réciproque d'une composée.
- Chapitre 15 : Matrices
 - Combinaison linéaire de matrices. Matrices élémentaires E_{ij} .
 - Formule du produit matriciel. Symbole de Kronecker. $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
 - Écriture matricielle d'un système linéaire. Résolution d'un système linéaire en utilisant une matrice « augmentée ».
 - Matrice échelonnée par lignes, algorithme du pivot. Rang d'une matrice, défini comme le nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée équivalente.
 - Puissances d'une matrice carrée. Règles de calcul. Matrices qui commutent entre elles. Matrices nilpotentes.
 - Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent. Exemples d'application pour le calcul des puissances de matrices particulières.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F . Montrer que $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.
- Donner la définition (avec des quantificateurs) de l'injectivité et de la surjectivité. Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
- Donner la définition (avec des quantificateurs) de l'injectivité et de la surjectivité. Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.
- Rappeler à quelle condition le produit AB de deux matrices A et B existe. Calculer un produit de matrices.
- Énoncer la formule pour le produit de deux matrices élémentaires E_{ij} et E_{kl} . Expliquer rapidement la formule en utilisant les lignes nulles de E_{ij} et les colonnes nulles de E_{kl} .
- Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
- Calculer les puissances successives de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.