

Programme n° 19

Semaine du 16/02/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 15 : Matrices
 - Combinaison linéaire de matrices. Matrices élémentaires E_{ij} .
 - Formule du produit matriciel. Symbole de Kronecker. $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
 - Écriture matricielle d'un système linéaire. Résolution d'un système linéaire en utilisant une matrice « augmentée ».
 - Matrice échelonnée par lignes, algorithme du pivot. Rang d'une matrice, défini comme le nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée équivalente.
 - Puissances d'une matrice carrée. Règles de calcul. Matrices qui commutent entre elles. Matrices nilpotentes.
 - Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent. Exemples d'application pour le calcul des puissances de matrices particulières.
 - Matrices diagonales, matrices triangulaires. Stabilité par les opérations usuelles.
 - Transposée. Matrices symétriques, matrices antisymétriques. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
 - Matrices inversibles. Déterminant et inverse d'une matrice de taille 2 (on peut demander le déterminant d'une matrice plus grande, calculé grâce à des opérations sur les lignes et les colonnes, et utiliser le fait qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul). Si une matrice contient une ligne nulle (ou une colonne nulle), ou si une matrice contient deux lignes égales (ou deux colonnes égales), ou si une ligne (ou une colonne) est combinaison linéaire des autres alors la matrice n'est pas inversible.
 - Inverse d'une matrice diagonale ou triangulaire. Inverse d'un produit.
 - Calcul de l'inverse d'une matrice M par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $\left(M \mid I_n \right)$.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer la formule pour le produit de deux matrices élémentaires E_{ij} et E_{kl} . Expliquer rapidement la formule en utilisant les lignes nulles de E_{ij} et les colonnes nulles de E_{kl} .
- Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
- Calculer les puissances successives de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Montrer que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles (de même taille) alors AB et $A^\top$ sont inversibles, et préciser leur inverse.
- Calculer l'inverse d'une matrice de taille 3.
- Soient A et P deux matrices de même taille, où P est inversible. Soit $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $B^n = P^{-1}A^nP$. Montrer que si B est inversible alors A aussi.