Programme n° 20

Semaine du 09/03/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 15 : Matrices
  - (Reprise du début du chapitre)
  - Matrices diagonales, matrices triangulaires. Stabilité par les opérations usuelles.
  - Transposée. Matrices symétriques, matrices antisymétriques. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
  - Matrices inversibles. Déterminant et inverse d'une matrice de taille 2 (on peut demander le déterminant d'une matrice plus grande, calculé grâce à des opérations sur les lignes et les colonnes, et utiliser le fait qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul). Si une matrice contient une ligne nulle (ou une colonne nulle), ou si une matrice contient deux lignes égales (ou deux colonnes égales), ou si une ligne (ou une colonne) est combinaison linéaire des autres alors la matrice n'est pas inversible.
  - Inverse d'une matrice diagonale ou triangulaire. Inverse d'un produit.
  - Calcul de l'inverse d'une matrice M par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} M & I_n \end{array}\right)$.
- Chapitre 16 : Continuité
  - Notation $\overline{I}$ et $\mathring{I}$ pour un intervalle I. Propriété vraie au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$.
  - Limite d'une fonction en un point réel / en $+\infty$ / en $-\infty$; limite à gauche, limite à droite. Unicité de la limite. Si f possède une limite finie en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée au voisinage de a. Opérations usuelles sur les limites. Caractérisation séquentielle de la limite.
  - Théorème des gendarmes. Limite par minoration / majoration. Théorème de la limite monotone.
  - Continuité d'une fonction en un point ; continuité à gauche, continuité à droite. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a. Opérations usuelles sur les fonctions continues.
  - Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Théorème de la bijection monotone.
  - Théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
  - Fonctions à valeurs complexes. Le TVI n'est pas valable pour les fonctions à valeurs non réelles.

Liste des questions et exercices de cours :

- Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Montrer que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles (de même taille) alors AB et $A^\top$ sont inversibles, et préciser leur inverse.
- Calculer l'inverse d'une matrice de taille 3.
- Soient A et P deux matrices de même taille, où P est inversible. Soit $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, B^n = P^{-1}A^nP$. Montrer que si B est inversible alors A aussi.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue en $a \in I$ et si $f(a) \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a.
- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
- Énoncer le théorème de la bijection monotone.
- Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 3 s'annule.
- Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et périodique est bornée.
- Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe.