Programme n° 21

Semaine du 16/03/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 16 : Continuité
  - Notation $\overline{I}$ et $\mathring{I}$ pour un intervalle I. Propriété vraie au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$.
  - Limite d'une fonction en un point réel / en $+\infty$ / en $-\infty$; limite à gauche, limite à droite. Unicité de la limite. Si f possède une limite finie en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée au voisinage de a. Opérations usuelles sur les limites. Caractérisation séquentielle de la limite.
  - Théorème des gendarmes. Limite par minoration / majoration. Théorème de la limite monotone.
  - Continuité d'une fonction en un point ; continuité à gauche, continuité à droite. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a. Opérations usuelles sur les fonctions continues.
  - Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Théorème de la bijection monotone.
  - Théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
  - Fonctions à valeurs complexes. Le TVI n'est pas valable pour les fonctions à valeurs non réelles.
- Chapitre 17 : Polynômes I
  - Ensemble $\mathbf{K}[X]$, coefficients, degré, coefficient dominant, coefficient constant.
  - Combinaison linéaire. Définition du produit de deux polynômes par la formule du produit de Cauchy. Propriétés de calcul. Propriétés par rapport au degré.
  - Formule du binôme de Newton.
  - Composé de deux polynômes. Degré du polynôme composé.
  - Évaluation en un point. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
  - Si $a \in \mathbf{K}$ est racine de $P \in \mathbf{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-a)Q$. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré. Si $P \in \mathbf{K}_n[X]$ possède (au moins) $n+1$ racines alors P est nul.
  - Polynôme dérivé. Dérivé de X^d et de $(X-a)^d$. Dérivé d'un polynôme composé. Formule de Leibniz. Formule de Taylor pour les polynômes (en 0 et en $a \in \mathbf{K}$).
  - **Attention :** Pas de division euclidienne, de multiplicité des racines ou de polynômes irréductibles dans ce chapitre.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue en $a \in I$ et si $f(a) \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a.
- Calculer $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
- Énoncer le théorème de la bijection monotone.
- Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair s'annule.
- Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et périodique est bornée.
- Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe.
- Pour tous $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, rappeler la formule pour les coefficients de PQ.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. En calculant de deux façons différentes le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de $(X + 5)^n - (X - 2)^n$.
- Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = (1 + X^2)P(X)$.
- Pour tous d et n dans $\mathbf{N}$, exprimer le polynôme dérivé n-ème de X^d.
- Soient $a < b$ deux réels et $P \in \mathbf{R}[X]$. Justifier que $\|P\|_\infty = \sup\left\{|P(t)| \;\middle|\; t \in [a, b]\right\}$ est bien défini et qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $\|P\|_\infty = |P(t_0)|$. Montrer que si $\|P\|_\infty = 0$ alors P est le polynôme nul.
- Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
- Énoncer la formule de Taylor en $a \in \mathbf{K}$ pour les polynômes.