Programme n° 22

Semaine du 23/03/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 17 : Polynômes I
  - Ensemble $\mathbf{K}[X]$, coefficients, degré, coefficient dominant, coefficient constant.
  - Combinaison linéaire. Définition du produit de deux polynômes par la formule du produit de Cauchy. Propriétés de calcul. Propriétés par rapport au degré.
  - Formule du binôme de Newton.
  - Composé de deux polynômes. Degré du polynôme composé.
  - Évaluation en un point. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
  - Si $a \in \mathbf{K}$ est racine de $P \in \mathbf{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-a)Q$. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré. Si $P \in \mathbf{K}_n[X]$ possède (au moins) $n+1$ racines alors P est nul.
  - Polynôme dérivé. Dérivé de X^d et de $(X-a)^d$. Dérivé d'un polynôme composé. Formule de Leibniz. Formule de Taylor pour les polynômes (en 0 et en $a \in \mathbf{K}$).
  - **Attention :** Pas de division euclidienne, de multiplicité des racines ou de polynômes irréductibles dans ce chapitre.
- Chapitre 18 : Arithmétique
  - Diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.
  - PGCD et PPCM. Algorithme d'Euclide.
  - Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul du nombre de diviseurs positifs d'un entier.

Liste des questions et exercices de cours :

- Pour tous $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, rappeler la formule pour les coefficients de PQ.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. En calculant de deux façons différentes le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de $(X+5)^n - (X-2)^n$.
- Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = (1+X^2)P(X)$.
- Pour tous d et n dans $\mathbf{N}$, exprimer le polynôme dérivé n-ème de X^d.
- Soient $a < b$ deux réels et $P \in \mathbf{R}[X]$. Justifier que $\|P\|_\infty = \sup\left\{|P(t)| \;\middle|\; t \in [a,b]\right\}$ est bien défini et qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $\|P\|_\infty = |P(t_0)|$. Montrer que si $\|P\|_\infty = 0$ alors P est le polynôme nul.
- Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
- Énoncer la formule de Taylor en $a \in \mathbf{K}$ pour les polynômes.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les entiers.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de 1234 par 5. En déduire le reste de la division de 1234^{2026} par 5.
- Un calcul de PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- Déterminer la décomposition de 10! en produit de facteurs premiers. En déduire le nombre de diviseurs positifs de 10!.
- Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, le nombre p divise $\binom{p}{k}$.