Programme n$^{\text{o}}$ 23

Semaine du 30/03/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 18 : Arithmétique
  - Diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.
  - PGCD et PPCM. Algorithme d'Euclide.
  - Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul du nombre de diviseurs positifs d'un entier.
- Chapitre 19 : Dérivabilité.
  - Taux d'accroissement, nombre dérivé, fonction dérivée. Dérivée à gauche, à droite. Rappel sur les dérivées des fonctions usuelles. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
  - Notations $g(x) = o(1)$ et $g(x) = o(x - a)$. Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Équation de la tangente en a. *Remarque : La manipulation des o n'est pas un objectif de ce chapitre.*
  - Opérations usuelles sur les dérivées (combinaison linéaire, produit, quotient, composée). Dérivabilité d'une réciproque, et formule pour la dérivée ; interprétation géométrique.
  - Extremum local. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable en $c \in \mathring{I}$ et si c est un extremum local alors c est un point critique de f.
  - Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables. Fonctions lipschitziennes. Inégalité des accroissements finis.
  - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Théorème de la limite de la dérivée. Formule de Leibniz.
  - Fonctions convexes / concaves ; interprétation géométrique avec les cordes. Lemme des pentes. Si f est convexe sur I alors f est continue sur $\mathring{I}$. Dans le cas où f est dérivable, elle est convexe si et seulement si f' est croissante ; position du graphe par rapport aux tangentes. Dans le cas où f est deux fois dérivable, elle est convexe si et seulement si f'' est à valeurs positives. Énoncés correspondants pour les fonctions concaves.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les entiers.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de 1234 par 5. En déduire le reste de la division de 1234^{2026} par 5.
- Un calcul de PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- Déterminer la décomposition de 10! en produit de facteurs premiers. En déduire le nombre de diviseurs positifs de 10!.
- Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, le nombre p divise $\dbinom{p}{k}$.
- Soient D un domaine de $\mathbf{R}$ symétrique par rapport à 0 et $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction dérivable. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
- Montrer que si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable en $c \in \mathring{I}$ et si f possède un extremum local en c alors c est un point critique de f.
- Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Énoncer la formule de Leibniz.
- Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$.
- Donner la définition de « fonction concave ». Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.