

Programme n° 24

Semaine du 06/04/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 19 : Dérivabilité.
 - Taux d'accroissement, nombre dérivé, fonction dérivée. Dérivée à gauche, à droite. Rappel sur les dérivées des fonctions usuelles. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
 - Notations $g(x) = o(1)$ et $g(x) = o(x - a)$. Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Équation de la tangente en a . *Remarque : La manipulation des o n'est pas un objectif de ce chapitre.*
 - Opérations usuelles sur les dérivées (combinaison linéaire, produit, quotient, composée). Dérivabilité d'une réciproque, et formule pour la dérivée; interprétation géométrique.
 - Extremum local. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en $c \in \overset{\circ}{I}$ et si c est un extremum local alors c est un point critique de f .
 - Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables. Fonctions lipschitziennes. Inégalité des accroissements finis.
 - Fonctions de classe \mathcal{C}^n . Théorème de la limite de la dérivée. Formule de Leibniz.
 - Fonctions convexes / concaves; interprétation géométrique avec les cordes. Lemme des pentes. Si f est convexe sur I alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$. Dans le cas où f est dérivable, elle est convexe si et seulement si f' est croissante; position du graphe par rapport aux tangentes. Dans le cas où f est deux fois dérivable, elle est convexe si et seulement si f'' est à valeurs positives. Énoncés pour les fonctions concaves.
- Chapitre 20 : Relations de comparaison
 - Définition de l'équivalence de deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ au voisinage de $a \in \bar{I}$. Définition de l'équivalence de deux suites. Exemple de $\ln(n + 1) \sim \ln(n)$. Mise sous forme $f(x) = g(x)\alpha(x)$ où $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. *La plupart des énoncés du chapitre ont leur analogue pour les suites.*
 - Règles de calcul (produit, quotient, puissances, valeur absolue). On ne peut pas additionner les équivalents. Quelques méthodes pour une somme ou une différence de deux termes : repérer si un terme est prépondérant, factoriser par un équivalent commun, etc.
 - Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ où $\ell \in \mathbf{R}^*$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$. Si deux fonctions sont équivalents au voisinage de a et si l'une tend vers une limite en a alors l'autre aussi et la limite est la même. Deux fonctions équivalentes sont de même signe au voisinage de a . Équivalent obtenu par encadrement. Substitution.
 - Équivalents en 0 et en $+\infty / -\infty$ des fonctions polynomiales. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$. Équivalents usuels en 0 : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $1 - \cos(x)$, $\text{Arcsin}(x)$, $\text{Arctan}(x)$, $\ln(1 + x)$, $e^x - 1$, $(1 + x)^\alpha - 1$, $\sqrt{1 + x} - 1$.
 - Définition d'une fonction (resp. d'une suite) négligeable devant une autre au voisinage de $a \in \bar{I}$ (resp. de $+\infty$). Définition d'une fonction dominée (resp. d'une suite) par une autre. Croissances comparées. Règles de calcul. Substitution.
 - On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x))$. Simplification des petits o dans les calculs : si $g_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$ alors $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g_1(x)) \iff f(x) = o_{x \rightarrow a}(g_2(x))$.
 - Exemple d'études de suites implicites, avec recherche d'un équivalent du terme général.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soient D un domaine de \mathbf{R} symétrique par rapport à 0 et $f : D \rightarrow \mathbf{K}$ une fonction dérivable. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
- Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en $c \in \overset{\circ}{I}$ et si f possède un extremum local en c alors c est un point critique de f .
- Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Énoncer la formule de Leibniz.
- Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$.
- Donner la définition de « fonction concave ». Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$.
- Énoncer et démontrer deux équivalents usuels de la liste.
- Comparer les quatre paires suivantes : n et n^2 , $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, $\ln(n)$ et \sqrt{n} , $n \sin(n)$ et n .
- Montrer que $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. En déduire que $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(t)$.
- Montrer que $\frac{\sqrt{n} + \ln(n)}{n^2 + 1} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Déterminer un équivalent simple de $\sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.
- Déterminer un équivalent simple de $2^{-n} + 3^{-n} + 4^{-n}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- (*) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. En déduire un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.