Programme n° 25

Semaine du 13/04/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 20 : Relations de comparaison
  - Définition de l'équivalence de deux fonctions $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ au voisinage de $a \in \overline{I}$. Définition de l'équivalence de deux suites. Exemple de $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Mise sous forme $f(x) = g(x)\alpha(x)$ où $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. *La plupart des énoncés du chapitre ont leur analogue pour les suites.*
  - Règles de calcul (produit, quotient, puissances, valeur absolue). On ne peut pas additionner les équivalents. Quelques méthodes pour une somme ou une différence de deux termes : repérer si un terme est prépondérant, factoriser par un équivalent commun, etc.
  - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ où $\ell \in \mathbf{R}^*$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$. Si deux fonctions sont équivalents au voisinage de a et si l'une tend vers une limite en a alors l'autre aussi et la limite est la même. Deux fonctions équivalentes sont de même signe au voisinage de a. Équivalent obtenu par encadrement. Substitution.
  - Équivalents en 0 et en $+\infty$ / $-\infty$ des fonctions polynomiales. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$. Équivalents usuels en 0 : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $1-\cos(x)$, $\operatorname{Arcsin}(x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\sqrt{1+x} - 1$.
  - Définition d'une fonction (resp. d'une suite) négligeable devant une autre au voisinage de $a \in \overline{I}$ (resp. de $+\infty$). Définition d'une fonction dominée (resp. d'une suite) par une autre. Croissances comparées. Règles de calcul. Substitution.
  - On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + o_{x\to a}\big(g(x)\big)$. Simplification des petits o dans les calculs : si $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $f(x) = o_{x\to a}\big(g_1(x)\big) \iff f(x) = o_{x\to a}\big(g_2(x)\big)$.
  - Exemple d'études de suites implicites, avec recherche d'un équivalent du terme général.
- Chapitre 21 : Polynômes II
  - Diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne. Un polynôme non nul B divise un polynôme A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul. Le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.
  - Un nombre $a \in \mathbf{K}$ est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P. Factorisation d'un polynôme dont on connaît les racines. Un polynôme non nul P possède au plus $\deg(P)$ racines deux à deux distinctes. Si $\deg(P) \leqslant n$ et P possède au moins $n+1$ racines alors $P = 0$.
  - Polynômes scindés. Théorème de d'Alembert-Gauss. Relations coefficients-racines (uniquement la somme et le produit des racines).
  - Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer et démontrer deux équivalents usuels de la liste.
- Comparer les quatre paires suivantes : n et n^2, $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, $\ln(n)$ et $\sqrt{n}$, $n\sin(n)$ et n.
- Montrer que $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. En déduire que $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$.
- Montrer que $\frac{\sqrt{n}+\ln(n)}{n^2+1} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Déterminer un équivalent simple de $\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
- Déterminer un équivalent simple de $2^{-n}+3^{-n}+4^{-n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- ($*$) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$. En déduire un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- Énoncer les relations coefficients-racines (uniquement la somme et le produit).
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine. Énoncer la caractérisation par les dérivées successives (uniquement la partie « α est racine d'ordre exactement r si et seulement si... »).
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
- Calculer une division euclidienne de polynômes.
- Déterminer une CNS sur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pour que le polynôme $B = X^2+1$ divise $A = X^4+X^3+aX^2+bX+2$.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^{2026}+X^3+1$ par $B = X^2-1$.