Programme n° 26

Semaine du 04/05/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 21 : Polynômes II
  - Diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne. Un polynôme non nul B divise un polynôme A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul. Le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est $P(a)$.
  - Un nombre $a \in \mathbf{K}$ est racine de P si et seulement si $X-a$ divise P. Factorisation d'un polynôme dont on connaît les racines. Un polynôme non nul P possède au plus $\deg(P)$ racines deux à deux distinctes. Si $\deg(P) \leqslant n$ et P possède au moins $n+1$ racines alors $P=0$.
  - Polynômes scindés. Théorème de d'Alembert-Gauss. Relations coefficients-racines (uniquement la somme et le produit des racines).
  - Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives.
  - Polynômes irréductibles. Les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racines réelles. Factorisation en produit d'irréductibles.
  - Fonctions rationnelles. Décomposition en éléments simples quand le dénominateur est scindé à racines simples.
  - Exemples de polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice.
- Chapitre 22 : Espaces vectoriels
  - Définition d'un espace vectoriel ; exemples usuels. Vecteurs colinéaires. Combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels ; caractérisation. Une intersection de sev est un sev.
  - Sous-espace engendré par une famille $(x_1, \ldots, x_n)$, défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$ et noté $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. C'est un sev qui contient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. Propriété fondamentale : si F est un sev qui contient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ alors $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq F$. Règle de simplification des Vect : on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille quand, à un des vecteurs de la famille, on ajoute une combinaison linéaire des autres ou quand on le multiplie par un scalaire non nul. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sev de $\mathbf{K}^p$.

Liste des questions et exercices de cours :

- Énoncer les relations coefficients-racines (uniquement la somme et le produit).
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine. Énoncer la caractérisation par les dérivées successives (uniquement la partie « α est racine d'ordre exactement r si et seulement si... »).
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
- Calculer une division euclidienne de polynômes.
- Déterminer une CNS sur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pour que le polynôme $B = X^2+1$ divise $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^{2026} + X^3 + 1$ par $B = X^2 - 1$.
- Énoncer le théorème sur les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.
- Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax+by=0\}$ est un espace vectoriel.
- On fixe $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$.
- Montrer que l'ensemble des suites géométriques n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.