Programme n° 27

Semaine du 18/05/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 22 : Espaces vectoriels
  - Définition d'un espace vectoriel ; exemples usuels. Vecteurs colinéaires. Combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels ; caractérisation. Une intersection de sev est un sev.
  - Sous-espace engendré par une famille $(x_1, \dots, x_n)$, défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$ et noté $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. C'est un sev qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Propriété fondamentale : si F est un sev qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subseteq F$. Règle de simplification des Vect : on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré quand, à un des vecteurs de la famille, on ajoute une combinaison linéaire des autres ou quand on le multiplie par un scalaire non nul. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sev de $\mathbf{K}^p$.
  - Famille génératrice, famille libre, famille liée, base. Caractérisation de la liberté pour une famille d'un vecteur et une famille de deux vecteurs. Coordonnées d'un vecteur dans une base ; détermination des coordonnées en revenant à la définition ou en résolvant un système linéaire. Si $(x_1, \dots, x_r)$ est une famille libre alors, pour tout vecteur y, la famille $(x_1, \dots, x_r, y)$ est libre si et seulement si $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.
  - Base de l'espace des solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 ou 2. Base de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2. Une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre ; base de Taylor de $\mathbf{K}_n[X]$ en un point $a \in \mathbf{K}$. Méthode pour montrer qu'une famille de fonctions est libre en évaluant en des points bien choisis (et éventuellement en dérivant). *Remarque : Pour une famille de n vecteurs de $\mathbf{K}^n$, on pourra utiliser le déterminant de la famille dans une base, bien que le résultat n'ait pas encore été démontré en cours.*
  - Somme de deux sev. Famille génératrice d'une somme de deux sev. Somme directe. Caractérisation : deux sev F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Supplémentaires.
- Chapitre 23 : Développements limités.
  - Définition d'un DL en $a \in \mathbf{R}$. Unicité du DL, s'il existe. DL d'une fonction paire / impaire, s'il existe. Troncature. L'existence d'une limite finie en a est équivalente à l'existence d'un DL à l'ordre 0 en a. Pour une fonction continue, la dérivabilité en a est équivalente à l'existence d'un DL d'ordre 1 en a.
  - Primitivation d'un DL. On ne peut pas dériver un DL (le DL de la dérivée peut ne pas exister). Formule de Taylor-Young (pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$).
  - Opérations sur les DL : somme, produit, quotient, composée.
  - Un équivalent est obtenu en prenant le premier terme non nul du DL. Calcul de limites avec des DL. Étude de prolongements par continuité, et de la dérivabilité du prolongement. Tangentes et asymptotes, et position relative du graphe.
  - Exemples de DL d'une réciproque. Exemples de développements asymptotiques de suites implicites.

Liste des questions et exercices de cours :

- **<u>Première question obligatoire pour tout le monde</u> :** Donner la définition de « famille génératrice » et de « famille libre ».
- On fixe $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$.
- Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{K}$. Montrer que la famille $\left(1, X-a, \dots, (X-a)^n\right)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$ et exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ dans cette base.
- Montrer que la famille $(\sin, \sin^2, \sin^3)$ est libre (deux méthodes au choix de l'élève : en évaluant ou en utilisant un polynôme).
- Donner la définition de la somme de deux sev. Donner la définition de « somme directe ».
- Énoncer deux DL usuels à l'ordre n : $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$, e^x, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$ (on pourra utiliser la notation des coefficients binomiaux généralisés $\dbinom{\alpha}{k}$ mais à condition de rappeler leur définition). DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 et de $\tan(x)$ à l'ordre 3.
- Énoncer la formule de Taylor-Young en un point $a \in \mathbf{R}$.
- Démontrer la formule du DL à l'ordre 3 de $\tan(x)$ (méthodes au choix de l'élève : avec la formule de Taylor-Young, en utilisant $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, en exploitant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$ et l'unicité du DL, en utilisant le DL de Arctan). On pourra demander le principe d'une deuxième méthode, sans le détail du calcul.
- Calculer de deux façons le DL à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{6}$ de $\cos(x)$.
- Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin(x))$.