

Programme n° 28

Semaine du 25/05/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 22 : Espaces vectoriels
 - (Reprise du début du chapitre.)
 - Somme de deux sev. Famille génératrice d'une somme de deux sev. Somme directe. Caractérisation : deux sev F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Supplémentaires.
- Chapitre 23 : Développements limités.
 - Définition d'un DL en $a \in \mathbf{R}$. Unicité du DL, s'il existe. DL d'une fonction paire / impaire, s'il existe. Troncature. L'existence d'une limite finie en a est équivalente à l'existence d'un DL à l'ordre 0 en a . Pour une fonction continue, la dérivabilité en a est équivalente à l'existence d'un DL d'ordre 1 en a .
 - Primitivation d'un DL. On ne peut pas dériver un DL (le DL de la dérivée peut ne pas exister). Formule de Taylor-Young (pour une fonction de classe \mathcal{C}^n).
 - Opérations sur les DL : somme, produit, quotient, composée.
 - Un équivalent est obtenu en prenant le premier terme non nul du DL. Calcul de limites avec des DL. Étude de prolongements par continuité, et de la dérivabilité du prolongement. Tangentes et asymptotes, et position relative du graphe.
 - Exemples de DL d'une réciproque. Exemples de développements asymptotiques de suites implicites.
- Chapitre 24 : Dénombrement
 - Cardinal d'un ensemble fini. Si E est fini et A est un sous-ensemble de E alors $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
 - Cardinal d'une réunion disjointe. Cardinal du complémentaire. Cardinal de la réunion de deux ensembles. Cardinal d'un produit cartésien. Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
 - Principe des tiroirs de Dirichlet pour les applications injectives, surjectives, bijectives.
 - p -listes / p -uplets. Arrangements. Permutations. Combinaisons.
 - Démonstration combinatoire de formules connues : symétrie des coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal, formule du binôme, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, formule du capitaine.

Liste des questions et exercices de cours :

- On fixe $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$.
- Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{K}$. Montrer que la famille $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$ et exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ dans cette base.
- Montrer que la famille (\sin, \sin^2, \sin^3) est libre (deux méthodes au choix de l'élève : en évaluant ou en utilisant un polynôme).
- Donner la définition de la somme de deux sev. Donner la définition de « somme directe ».
- Énoncer deux DL usuels à l'ordre n : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan}(x)$, e^x , $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$ (on pourra utiliser la notation des coefficients binomiaux généralisés $\binom{\alpha}{k}$ mais à condition de rappeler leur définition). DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 et de $\tan(x)$ à l'ordre 3.
- Énoncer la formule de Taylor-Young en un point $a \in \mathbf{R}$.
- Démontrer la formule du DL à l'ordre 3 de $\tan(x)$ (méthodes au choix de l'élève : avec la formule de Taylor-Young, en utilisant $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, en exploitant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$ et l'unicité du DL, en utilisant le DL de Arctan). On pourra demander le principe d'une deuxième méthode, sans le détail du calcul.
- Calculer de deux façons le DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$ de $\cos(x)$.
- Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin(x))$.
- Soient A et B deux ensembles finis. Énoncer et démontrer la formule pour $\text{Card}(A \cup B)$.
- Énoncer la formule du capitaine et la démontrer de façon combinatoire.
- Déterminer le nombre d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5.
- On constitue une main de 5 cartes avec un jeu de 32 cartes. Compter le nombre de brelans (3 cartes de même valeur, mais pas mieux) et le nombre de doubles paires (mais pas mieux).
- Déterminer le nombre d'anagrammes de COLLE.