Programme n° 29

Semaine du 01/06/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 24 : Dénombrement
  - Cardinal d'un ensemble fini. Si E est fini et A est un sous-ensemble de E alors $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
  - Cardinal d'une réunion disjointe. Cardinal du complémentaire. Cardinal de la réunion de deux ensembles. Cardinal d'un produit cartésien. Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
  - Principe des tiroirs de Dirichlet pour les applications injectives, surjectives, bijectives.
  - p-listes / p-uplets. Arrangements. Permutations. Combinaisons.
  - Démonstration combinatoire de formules connues : symétrie des coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal, formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, formule du capitaine.
- Chapitre 25 : Espaces vectoriels de dimension finie
  - Définition de « être de dimension finie ». Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
  - Si $\mathcal{L}$ est libre et si $\mathcal{G}$ est génératrice alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \text{Card}(\text{G})$. En dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension ; le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension. Dimension de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$ et de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
  - En dimension n, une famille libre ou génératrice est une base si et seulement si elle est de cardinal n. Pour une famille de cardinal n, les propriétés « être libre », « être génératrice » et « être une base » sont équivalentes.
  - Rang d'une famille de vecteurs. Le rang ne change pas quand on effectue des opérations élémentaires (pour calculer le rang, on pourra utiliser la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans une base donnée) ; détermination d'une base du sev engendré par une famille de vecteurs.
  - Si F est un sev de E alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $F = E$. Méthode par « inclusion-dimension » pour montrer une égalité entre deux ev.
  - Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est une base de F et $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de G alors F et G sont en somme directe si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ est libre. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Dimension d'une somme directe ; dimension des supplémentaires. Construction d'un supplémentaire de F en complétant une base de F en une base de E.
  - Formule de Grassmann. Utilisation de la dimension pour caractériser les sev supplémentaires. Hyperplans ; un sev est un hyperplan si et seulement s'il possède un supplémentaire qui est une droite.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soient A et B deux ensembles finis. Énoncer et démontrer la formule pour $\mathrm{Card}(A \cup B)$.
- Énoncer la formule du capitaine et la démontrer de façon combinatoire.
- Déterminer le nombre d'entiers entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5.
- On constitue une main de 5 cartes avec un jeu de 32 cartes. Compter le nombre de brelans (3 cartes de même valeur, mais pas mieux) et le nombre de doubles paires (mais pas mieux).
- Déterminer le nombre d'anagrammes de COLLE.
- Soient $(x_1, \ldots, x_r)$ une famille libre de vecteurs de E, et $y \in E$. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_r, y)$ est liée si et seulement si $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_r)$.
- Énoncer le théorème de la base incomplète (version forte).
- Quelles inégalités existent entre le cardinal d'une famille libre, le cardinal d'une famille génératrice et la dimension ? Donner une CNS sur le cardinal pour qu'une famille libre (resp. génératrice) soit une base.
- Énoncer et démontrer la formule de Grassmann (on pourra utiliser le résultat pour une somme directe sans le redémontrer, mais il faut être capable d'expliquer rapidement pourquoi il est vrai, par exemple en concaténant des bases).
- Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ est un sev de $\mathbf{R}_3[X]$ et que $\dim(E) \leqslant 3$. Déterminer ensuite la dimension et une base de E.
- Déterminer une base et un supplémentaire de $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$.
- Donner la définition de la trace. Montrer que l'ensemble $E = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un espace vectoriel. Dans le cas $n = 2$, en déterminer une base.
- Déterminer la dimension de l'espace $\mathbf{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques et de l'espace $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques. En déduire que $\mathbf{M}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathbf{A}_n(\mathbf{R})$.