

## Programme n° 30

Semaine du 08/06/2026 – La dernière!

### Contenu du cours :

- Chapitre 25 : Espaces vectoriels de dimension finie
  - Définition de « être de dimension finie ». Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
  - Si  $\mathcal{L}$  est libre et si  $\mathcal{G}$  est génératrice alors  $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$ . En dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension; le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension. Dimension de  $\mathbf{K}^n$ , de  $\mathbf{K}_n[X]$  et de  $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .
  - En dimension  $n$ , une famille libre ou génératrice est une base si et seulement si elle est de cardinal  $n$ . Pour une famille de cardinal  $n$ , les propriétés « être libre », « être génératrice » et « être une base » sont équivalentes.
  - Rang d'une famille de vecteurs. Le rang ne change pas quand on effectue des opérations élémentaires (pour calculer le rang, on pourra utiliser la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans une base donnée); détermination d'une base du sev engendré par une famille de vecteurs.
  - Si  $F$  est un sev de  $E$  alors  $\dim(F) \leq \dim(E)$ , avec égalité si et seulement si  $F = E$ . Méthode par « inclusion-dimension » pour montrer une égalité entre deux ev.
  - Si  $(x_1, \dots, x_m)$  est une base de  $F$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  est une base de  $G$  alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si la famille  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  est libre. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Dimension d'une somme directe; dimension des supplémentaires. Construction d'un supplémentaire de  $F$  en complétant une base de  $F$  en une base de  $E$ .
  - Formule de Grassmann. Utilisation de la dimension pour caractériser les sev supplémentaires. Hyperplans; un sev est un hyperplan si et seulement s'il possède un supplémentaire qui est une droite.
- Chapitre 26 : Espaces probabilisés
  - Univers, issues, événements, événements élémentaires. Événement impossible, événement certain, événement contraire, événements incompatibles. Système complet d'événements.
  - Mesure de probabilité sur un univers fini. Exemple de la mesure uniforme / équiprobabilité. Probabilité de  $\overline{A}$ , de  $B \setminus A$  et de  $A \cup B$ . Croissance, sous-additivité et additivité.
  - Une distribution de probabilité sur un ensemble fini  $I$  est une famille  $(p_i)_{i \in I}$  de réels positifs ou nuls donc la somme vaut 1. Dans le cas  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  (avec les  $\omega_i$  deux à deux distincts), si  $(p_1, \dots, p_n)$  est une distribution de probabilité alors il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ . L'équiprobabilité correspond à la distribution  $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ .
  - Probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , notée  $\mathbf{P}_B(A)$ . L'application  $\mathbf{P}_B$  est une mesure de probabilité sur  $\Omega$ . Formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
  - Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle de  $n$  événements. Lemme des coalitions.

**Liste des questions et exercices de cours :**

- Soient  $(x_1, \dots, x_r)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ , et  $y \in E$ . Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_r, y)$  est liée si et seulement si  $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ .
- Énoncer le théorème de la base incomplète (version forte).
- Quelles inégalités existent entre le cardinal d'une famille libre, le cardinal d'une famille génératrice et la dimension? Donner une CNS sur le cardinal pour qu'une famille libre (resp. génératrice) soit une base.
- Énoncer et démontrer la formule de Grassmann (on pourra utiliser le résultat pour une somme directe sans le redémontrer, mais il faut être capable d'expliquer rapidement pourquoi il est vrai, par exemple en concaténant des bases).
- Montrer que l'ensemble  $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$  est un sev de  $\mathbf{R}_3[X]$  et que  $\dim(E) \leq 3$ . Déterminer ensuite la dimension et une base de  $E$ .
- Déterminer une base et un supplémentaire de  $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$ .
- Donner la définition de la trace. Montrer que l'ensemble  $E = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$  est un espace vectoriel. Dans le cas  $n = 2$ , en déterminer une base.
- Déterminer la dimension de l'espace  $\mathbf{S}_n(\mathbf{R})$  des matrices symétriques et de l'espace  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$  des matrices antisymétriques. En déduire que  $\mathbf{M}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ .
- Énoncer et démontrer la formule pour la probabilité de la réunion de deux événements.
- Énoncer la formule des probabilités composées et la formule de Bayes.
- Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
- Calculer la probabilité que, dans un groupe de  $n$  personnes, au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire.
- On considère  $n + 1$  urnes  $U_0, \dots, U_n$ . Pour tout  $k$ , l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules rouges et  $n - k$  boules bleues. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. Calculer la probabilité que la boule soit rouge.