

Programme n° 3

Semaine du 28/09/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 2 : Équations et inéquations
 - Valeur absolue. Éliminer les valeurs absolues d'une expression (en distinguant des cas). Inégalité triangulaire (et son cas d'égalité). Résolution d'une équation ou d'une inéquation contenant une valeur absolue ; interprétation de la valeur absolue d'une différence comme une distance.
 - Parties de $\mathbf{R}$ majorées, minorées, bornées. Maximum, minimum. Partie entière d'un réel x : définition, courbe, caractérisation comme l'unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.
- Chapitre 3 : Fonctions usuelles
 - Fonction exponentielle, définie comme l'unique fonction dérivable telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$ (existence admise). Courbe. Propriétés de calcul. Inégalité $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq 1 + x$ et interprétation géométrique.
 - Fonction logarithme népérien $\ln$, définie comme la bijection réciproque de $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$. Dérivée. Courbe. Propriétés de calcul. Inégalité $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$ et interprétation géométrique. Pour tout $a > 0$ différent de 1, logarithme en base a ; le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier d est $\lfloor \log_{10}(d) \rfloor + 1$.
 - Fonctions paires, fonctions impaires. Interprétation géométrique.
 - Fonctions puissances : définition et domaine de définition quand l'exposant est entier naturel, entier relatif, réel. Dérivée. Positions relatives des courbes pour différentes valeurs de l'exposant. Propriétés de calcul.
 - Théorème des croissances comparées : $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Généralisation : pour tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, on a $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $|x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $\frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x^\beta \ln^\gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Exemples de calculs de limites (factorisation par le terme dominant, règle pour la limite d'une composée, méthode de la quantité conjuguée). On pourra utiliser des formulations du type « au voisinage de $+\infty$ » sans se préoccuper (pour le moment) de leur sens exact.

Liste des questions et exercices de cours :

- Définition de la valeur absolue d'un réel x comme $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, montrer que $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.
- Énoncer et démontrer de l'inégalité triangulaire.
- Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. Montrer que A est bornée si et seulement si $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$.
- Montrer que $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et en déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{x}$.
- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non entier. Donner la définition et le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$. À quelle condition f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? À quelle condition le prolongement est-il dérivable en 0 ?
- Représenter sur un même dessin les cinq fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^{1/2}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ (sur $\mathbf{R}_+$).
- Calculer l'une des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x - \ln^2(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{2+x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{2+x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.