Programme n° 8

Semaine du 16/11/2026

Contenu du cours :

- Chapitre 5 : Calculs algébriques
  - Symboles $\sum$ et $\prod$. Propriétés de calcul. Changement d'indice. Télescopage.
  - Somme des entiers, des carrés, des cubes. Somme des termes d'une suite géométrique. Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
  - Coefficient binomial $\binom{n}{k}$ pour $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$, défini comme $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$, et 0 sinon. Formule du triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton. **Pas d'interprétation combinatoire dans ce chapitre.**
  - Sommes doubles et interversion des symboles $\sum$ (cas « rectangulaire », cas « triangulaire »).
- Chapitre 6 : Fonctions d'une variable réelle
  - Domaine de définition. Courbe d'une fonction.
  - Opérations usuelles sur les fonctions (somme, produit, quotient, composée). Transformations élémentaires sur les courbes (courbe de $x \mapsto f(x)+c$, etc). Fonctions paires, fonctions impaires et fonctions périodiques ; interprétation sur la courbe ; utilisation pour proposer un intervalle d'étude.
  - Monotonie. Fonctions minorées, majorées, bornées.
  - Techniques « classiques » de calculs de limites (terme dominant, croissances comparées, quantité conjuguée, taux d'accroissement). Asymptotes verticales, asymptotes obliques.

Liste des questions et exercices de cours :

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que le produit des entiers impairs de 1 à $2n+1$ est $\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
- Énoncer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.
- Énoncer la formule définissant les coefficients binomiaux. Calcul d'un « petit » coefficient binomial.
- Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer la formule du binôme de Newton. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
- Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.
- Déterminer si les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.
- Montrer que la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ possède une asymptote en $+\infty$, que l'on déterminera.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$ est bornée sur $\mathbf{R}$.
- Tracer (sans étude de la fonction) l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^x$. Montrer que la fonction n'est ni majorée ni minorée sur $\mathbf{R}$.
- Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{x}$.