

# Chapitre 0 : Grandeurs, dimensions

## 1 Mesure d'une grandeur physique

### 1.1 Définitions

On appelle **mesurande** une grandeur qui peut être mesurée, estimée. Ex : longueur d'une table, intensité du courant parcourant un fil électrique, pression atmosphérique, etc...

On appelle **mesurage** tout procédé expérimental visant à obtenir une information quantitative sur un système physique, c'est-à-dire l'estimation d'une grandeur physique.

On appelle **mesure** le résultat d'un mesurage. Une mesure est constituée d'une valeur numérique associée à une **unité**. Par extension, on associe à chaque grandeur physique une ou plusieurs unités.

La **métrologie** est le domaine des sciences qui se consacre au mesurage des grandeurs physiques. L'un des organes officiels de la métrologie, le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM, fondé en 1875) a pour mission d'assurer l'uniformité mondiale des mesures et leur traçabilité au système international d'unité. Il se réunit tous les quatre ans au cours des CGPM (Conférence Générale des Poids et Mesures) pour statuer sur d'éventuelles révisions des unités du système international.

### 1.2 Nécessité d'une référence

La définition des unités de mesure en science répond à une double nécessité :

- appréhender le résultat d'une expérience en comparant la valeur de la grandeur mesurée à une grandeur de référence de même nature, appelée **unité**.
- partager le résultat d'une expérience avec quelqu'un d'autre utilisant la même référence.

Ces deux points illustrent bien les propriétés essentielles qu'on attend des unités de mesure : elles doivent être *invariables dans le temps et dans l'espace* et elles doivent être *universelles*.

Le premier système légal d'unités universelles est le **système métrique**, système décimal fondé sur la définition du mètre et du kilogramme, adopté en France en 1795 et qui s'est progressivement propagé en Europe, puis dans le monde. Plusieurs systèmes d'unités plus complets (faisant intervenir des unités mécaniques puis électriques) se succèdent : CGS à partir de 1874, MKSA à partir de 1946 pour aboutir en 1960 (11ème CGPM) à l'apparition du système d'unités tel que nous l'utilisons encore aujourd'hui, le système international d'unités (ou SI). En 2018, la 26ème CGPM valide la plus grande révision du SI depuis 1960. Les définitions des unités du SI reposent désormais sur les valeurs de certaines constantes de la physique.

**Rq** : Une **unité-étalon** est une unité qui est définie à partir d'un objet concret. Cela a longtemps été le cas du mètre (de 1889 à 1960) et cela fut encore le cas de l'étalon de masse conservé au siège du BIPM, au pavillon de Breteuil, près de Paris, jusqu'en 2018. L'utilisation d'un étalon n'est pas très pratique quand on cherche une référence universelle et invariable dans le temps, comme on peut le constater dans le texte reproduit ci-dessous. La nouvelle définition du kilogramme repose sur les valeurs de trois constantes de la physique. Elle devient invariable dans le temps et l'espace!

Le prototype international du kilogramme, un objet fabriqué spécialement en platine iridié, est conservé au BIPM dans les conditions fixées par la 1re CGPM en 1889 lorsqu'elle approuva ce prototype et déclara : Ce prototype sera considéré désormais comme unité de masse. La

3e CGPM (1901), dans une déclaration tendant à faire cesser l'ambiguïté qui existait dans l'usage courant sur l'utilisation du terme « poids », confirma que :

**Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.**

Il en résulte que la masse du prototype international du kilogramme est toujours égale à 1 kilogramme exactement,  $m(K) = 1 \text{ kg}$ . Cependant, en raison de l'accumulation inévitable de polluants sur les surfaces, le prototype international subit une contamination réversible de surface d'environ  $1 \mu\text{g}$  par an en masse. C'est pourquoi le Comité international a déclaré que, jusqu'à plus ample information, la masse de référence du prototype international est celle qui suit immédiatement le nettoyage-lavage selon une méthode spécifique (PV, 1989, 57, 15-16 et PV, 1990, 58, 10-12). La masse de référence ainsi définie est utilisée pour étalonner les étalons nationaux en platine iridié (Metrologia, 1994, 31, 317-336).

### 1.3 Le Système International d'unités

Il est d'abord constitué de 7 unités associées à des grandeurs physiques. Ce sont les **unités de base**. Ces grandeurs (avec leur unité SI) sont :

- la longueur (**mètre**),
- la masse (**kilogramme**),
- le temps (**seconde**),
- l'intensité du courant électrique (**ampère**),
- la température (**kelvin**),
- la quantité de matière (**mole**),
- l'intensité lumineuse (**candela**).

La définition actuelle de ces unités est présentée dans un tableau en fin de chapitre.

Toutes les autres grandeurs sont définies à partir des grandeurs de base. Par exemple, une vitesse est le rapport d'une longueur et d'un temps. Les unités associées à ces grandeurs sont appelées **unités dérivées**. Elles se classent en deux types :

- Les **unités dérivées simples** ont leur propre symbole. Ex : le volt (V) pour les tensions, le joule (J) pour les énergies, l'ohm ( $\Omega$ ) pour les résistances électriques, etc...
- Les **unités dérivées composées** sont construites à partir des unités de base et/ou des unités dérivées simples. Ex :  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour les vitesses,  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$  pour les champs électriques, etc.

## 2 Dimension d'une grandeur physique

### 2.1 Définition

Par convention, les grandeurs physiques sont organisées selon un système de dimensions. Chacune des sept grandeurs de base du système SI est supposée avoir sa propre dimension, représentée par les lettres  $L$  (longueur),  $M$  (masse),  $T$  (temps),  $\theta$  (température),  $I$  (intensité électrique),  $N$  (quantité de matière),  $J$  (intensité lumineuse).

### 2.2 Équation aux dimensions

Toutes les grandeurs physiques dérivées sont reliées entre elle ou aux grandeurs de base par des équations de définition ( $U = RI$ ) ou des relations propres aux lois naturelles ( $F = -Gmm'/r^2$ ). Ces relations établissent la *nature physique* des grandeurs dérivées.

De manière générale, on peut écrire la dimension d'une grandeur dérivée  $G$ , notée  $[G]$ , en fonction des dimensions des grandeurs de base sous la forme :

$$[G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma \theta^\delta I^\varepsilon N^\zeta J^\eta$$

Où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$  et  $\eta$  sont des nombres rationnels appelés **exposants dimensionnels** de  $G$ . Cette décomposition est *unique*. Les exposants dimensionnels sont caractéristiques de la nature physique de  $G$ .

Par définition on dit que  $G$  est une grandeur sans dimension (ou de dimension un) si tous ses exposants dimensionnels sont nuls. Dans ce cas, ces grandeurs sont exprimées sans unités, sauf dans deux cas particuliers : celui des angles plans (exprimés en radians) et des angles solides (exprimés en stéradians).

### 2.3 Applications

La notion de dimension et les équations aux dimensions permettent :

- De déterminer toutes les grandeurs physiques comparables entre elles. Par exemple, l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  d'un corps en mouvement, la chaleur  $Q = RI^2\Delta t$  qui se dégage d'une résistance parcourue par un courant continu  $I$  pendant un temps  $\Delta t$ , l'énergie potentielle  $E_p = mgz$  d'un corps soumis à l'attraction terrestre sont trois grandeurs qui ont la même nature physique car elles sont toutes homogènes à une énergie : leur dimension est du type  $[E] = ML^2T^{-2}$ .
- De réaliser rapidement des conversions entre unités.
- De vérifier l'homogénéité d'une équation (une équation est homogène si les 2 membres ont la même dimension).
- De prévoir par une analyse dimensionnelle une formule traduisant une loi physique, dans le cas où l'on suppose que la relation attendue s'écrit sous la forme d'une loi de puissances.

Par exemple, supposons qu'un modèle de propagation des ondes sonores dans un milieu matériel de masse volumique  $\rho$  et de pression  $P$  prévoit que la célérité  $c$  des ondes dans ce milieu dépend de  $\rho$  et  $P$  de la manière suivante :  $c = \text{Cste}P^\alpha\rho^\beta$ . L'analyse dimensionnelle de l'équation permet d'énoncer le résultat suivant : le seul moyen de rendre cette équation homogène est de prendre  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = -1/2$ . Ainsi, si l'hypothèse du modèle s'avère correcte (à vérifier par une analyse expérimentale du système), alors on doit s'attendre à ce que :

$$c = \text{Cste} \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

Rq : L'étude dimensionnelle ne permet pas de déterminer la valeur de la constante multiplicative. Une étude théorique détaillée du système montrerait que pour une propagation dans un gaz parfait diatomique, cette constante vaut  $\sqrt{\gamma}$  où  $\gamma$  est une caractéristique thermodynamique du gaz qui vaut 1,4.

## ANNEXE

### Unités de base du SI :

Grandeur	Nom	Symbole	Définition
Temps	seconde	s	La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium $\Delta\nu_{Cs}$ , la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à $s^{-1}$ .
Longueur	mètre	m	Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, $c$ , égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m \cdot s^{-1}$ , la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$ .
Masse	kilogramme	kg	Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, $h$ , égale à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en $J \cdot s$ , unité égale à $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ , le mètre et la seconde étant définis en fonction de $c$ et $\Delta\nu_{Cs}$ .
Température	kelvin	K	Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, $k_B$ , égale à 1,380 649 $\times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $J \cdot K^{-1}$ , unité égale à $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$ , le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de $h$ , $c$ et $\Delta\nu_{Cs}$ .
Intensité du courant électrique	ampère	A	L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, $e$ , égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à $A \cdot s$ , la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$ .

Grandeur	Nom	Symbole	Définition
quantité de matière	mole	mol	La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé «nombre d'Avogadro», correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, $N_A$ , lorsqu'elle est exprimée en $mol^{-1}$ . La quantité de matière, symbole $n$ , d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.
intensité lumineuse	candela	cd	La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}$ Hz, $K_{Cd}$ , égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm \cdot W^{-1}$ , unité égale à $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$ , ou $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$ , le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de $h$ , $c$ et $\Delta\nu_{Cs}$ .

### Unités dérivées du SI de dimension un :

angle plan	radian	rad	le radian est égal à l'angle plan qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égal au rayon.
angle solide	stéradian	sr	le stéradian est égal à l'angle solide d'un cône qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté une longueur égal au rayon de la sphère.

**Préfixes SI :**

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
$10^1$	déca	da	$10^{-1}$	déci	d
$10^2$	hecto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	méga	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	téra	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	péta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

**Constantes physiques :**

Grandeur	Symbole	Valeur approchée + unité
Constante d'Avogadro	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R$	$8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Faraday	$F$	$96\,485 \text{ C.mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de gravitation	$G$	$6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Célérité de la lumière	$c$	$2,998 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ (exact)
Charge élémentaire	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Électronvolt	$eV$	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Masse de l'électron	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Unité de masse atomique	$u$	$1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Zéro Celsius	$T_0$	$273,15 \text{ K}$ (exact)
Pression atmosphérique	$P_0$	$1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar}$
Volume molaire ( $0^\circ\text{C}, P_0$ )	$V_m$	$22,414 \text{ L.mol}^{-1}$
Accélération de pesanteur	$g_0$	$9,807 \text{ m.s}^{-2}$
Rayon de la Terre (moyen)	$R$	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$
Masse de la Terre	$M$	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Distance Terre-Soleil	$d$	$1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

**Alphabet grec :**

Lettre	alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	zêta	êta	thêta	lambda
minuscule	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$\lambda$
majuscule			$\Gamma$	$\Delta$				$\Theta$	$\Lambda$

mu	nu	ksi	pi	rho	sigma	tau	phi	chi	psi	omega
$\mu$	$\nu$	$\xi$	$\pi$	$\rho$	$\sigma$	$\tau$	$\varphi$ ou $\phi$	$\chi$	$\psi$	$\omega$
		$\Xi$	$\Pi$		$\Sigma$		$\Phi$		$\Psi$	$\Omega$