Chapitre 0 bis : Mesure, incertitude

1 Notion d'incertitude

1.1 Introduction

Que ce soit au laboratoire, dans l'industrie ou dans notre vie quotidienne, nous avons constamment besoin d'effectuer des **mesurages**. Leur objectif consiste à nous renseigner quantitativement sur un système physique, sous la forme d'une **mesure**, c'est-à-dire une valeur numérique associée à une unité. Pour différentes raisons que nous allons évoquer dans ce chapitre :

> il est impossible d'avoir une confiance absolue dans le résultat d'un mesurage.

Ce constat s'explique assez simplement ; dans tout mesurage il existe de nombreux facteurs **dont l'expérimentateur n'a pas la maîtrise** et qui influencent la mesure. Dans un premier temps nous considérerons le cas où **ces facteurs sont parfaitement aléatoires**, au sens où ils n'introduisent aucun **biais** dans le mesurage (nous reviendrons plus tard sur la notion de biais).

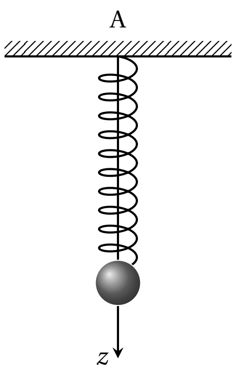
> Différents mesurages, réalisés **dans les mêmes conditions**, conduiront à **des mesures différentes les unes des autres**.
> On appelle **incertitude de mesure** l'estimation quantitative de la **dispersion** des valeurs associées à ces différents mesurages. Elle permet de mesurer la variabilité du résultat d'un mesurage produite par des causes aléatoires.

L'estimation d'une incertitude de mesure se fonde donc sur une étude **statistique** dont nous allons voir les grands principes dans ce chapitre.

1.2 Notion de source d'incertitude

1.2.1 Exemple 1

Situation : on cherche à mesurer la période des oscillations d'un système {masse + ressort}. Pour cela on met en œuvre le protocole suivant :



- placer la masse dans sa position d'équilibre puis la tirer légèrement vers le bas pour étirer le ressort ;
- lâcher la masse sans vitesse initiale ;
- lancer le chronomètre à un instant où la masse passe par sa position d'équilibre ;
- compter dix oscillations puis arrêter le chronomètre. La période recherchée est égale au dixième de la durée mesurée.

Analyse : comment vérifier qu'il y a une incertitude sur la mesure ? Proposer une ou plusieurs sources d'incertitude.

1.2.2 Exemple 2

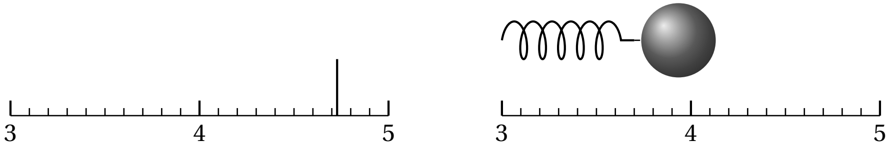
Situation : on cherche à mesurer la résistance électrique d'un résistor. Pour cela on met en œuvre le protocole suivant :

- brancher un ohmmètre aux bornes du résistor avec des pinces crocodiles ;
- **adapter le calibre** puis noter la valeur affichée.

Analyse : comment vérifier qu'il y a une incertitude sur la mesure ? Proposer une ou plusieurs sources d'incertitude.

1.2.3 Exemple 3

Situation : on souhaite mesurer la position d'un objet avec un instrument gradué (voir ci-dessous). Dans le premier cas il s'agit de la position du trait et dans le deuxième celui du centre de la masse.

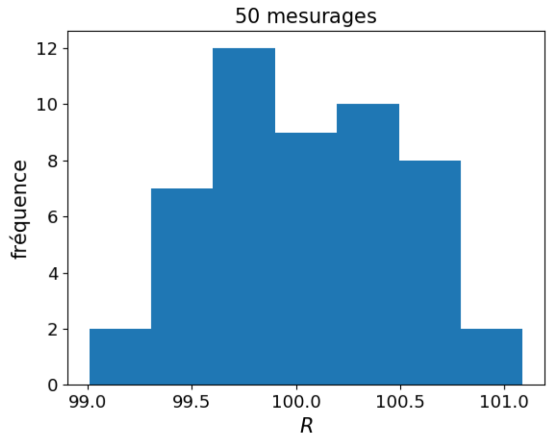


Dans les deux cas, proposer une valeur de position avec **trois chiffres après la virgule** (l'unité n'a pas d'importance).

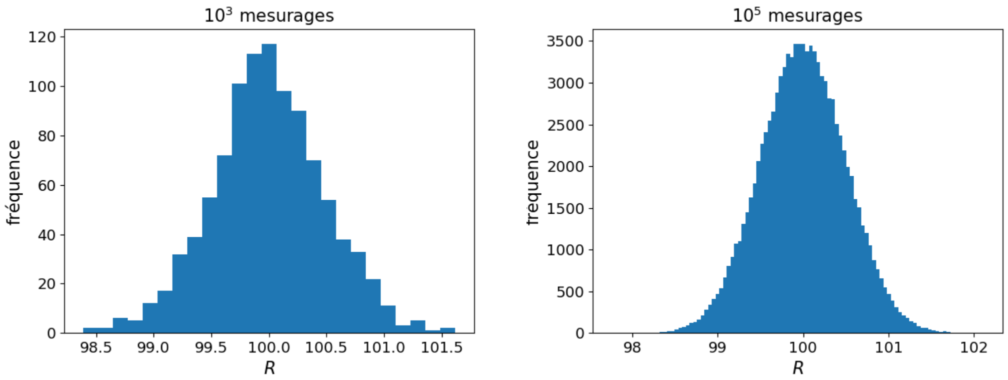
Analyse : comment vérifier qu'il y a une incertitude sur la mesure ? Proposer une ou plusieurs sources d'incertitude.

1.3 Hasard et probabilités

Revenons sur l'exemple 2 ; imaginons que l'on mesure la valeur de la résistance électrique d'un résistor avec 50 ohmmètres, tous de la même série. On obtient alors une liste de valeurs légèrement différentes les unes des autres. Pour quantifier la variabilité des mesurages, on peut tracer **l'histogramme** des valeurs obtenues. Voilà ci-dessous à quoi cela pourrait ressembler.



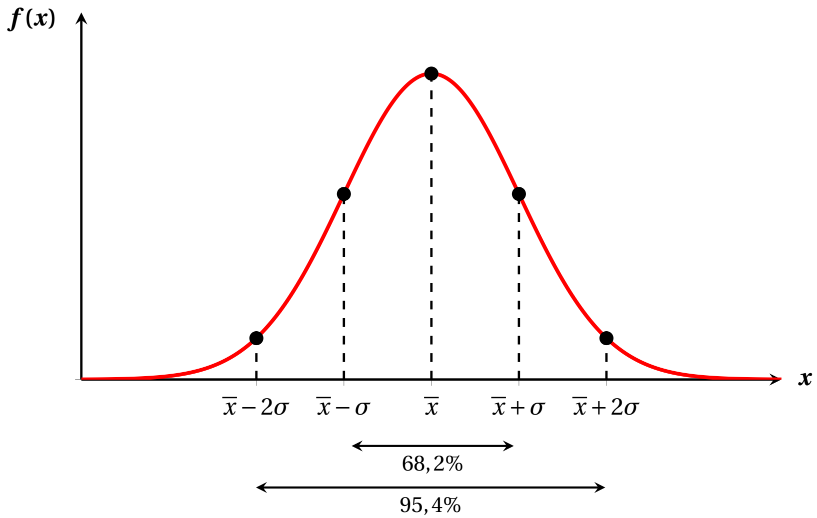
Allons plus loin et imaginons maintenant que l'on répète l'expérience avec 10^3, puis 10^5 ohmmètres différents ! L'histogramme pourrait alors ressembler à ceci :



Quand le nombre de mesurages augmente, l'enveloppe de l'histogramme tend vers une courbe régulière. Celle-ci permet de visualiser les valeurs les plus probables et celles qui le sont moins. Dans la limite où le nombre de mesurages tend vers l'infini, l'enveloppe de l'histogramme constitue une fonction continue $f(x)$ que l'on appelle **densité de probabilité** de x. La forme de cette fonction dépend de la nature des causes de la variabilité. Cette année, nous allons aborder deux cas de figure : la **loi normale** et la **loi uniforme continue**.

1.4 Loi normale (ou loi gaussienne)

Cette distribution est très couramment rencontrée lorsque la variabilité est causée par des processus aléatoires multiples et indépendants les uns des autres. On a représenté ci-dessous son allure.



Sans rentrer dans les détails mathématiques de cette fonction, voici quelques propriétés importantes :

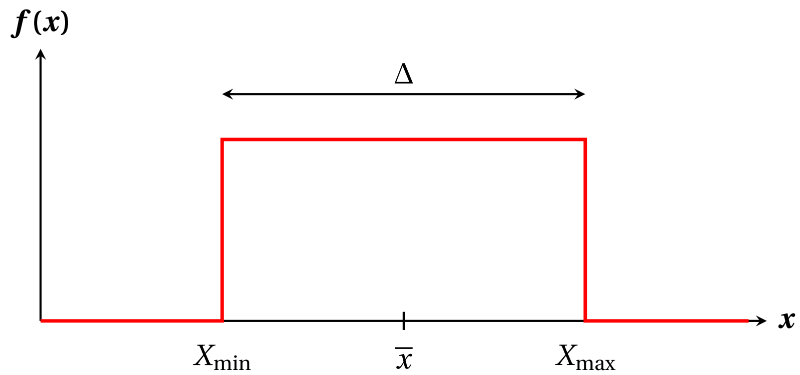
- La **valeur la plus probable** est celle qui rend $f(x)$ maximale.
- La gaussienne est symétrique par rapport à la valeur la plus probable. Autrement dit, la valeur la plus probable est également la **valeur moyenne**, notée $\overline{x}$ (c'est aussi la médiane).
- La "largeur" de la gaussienne est quantifiée à l'aide de **l'écart-type**, défini par $\sigma = \sqrt{\overline{(x^2)} - (\overline{x})^2}$.
- Dans le cas d'une distribution gaussienne, la probabilité qu'une mesure x s'écarte de la moyenne de moins d'un écart-type (c'est-à-dire qu'elle soit comprise dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$) est égale à 68,2%. Elle vaut environ 95% pour un écart inférieur à 2σ.
- Même si la probabilité est faible, il est possible qu'une mesure soit très éloignée de la moyenne. On parle **d'évènement rare** lorsque l'écart entre x et $\overline{x}$ est supérieur à 2σ, autrement dit si :

  $$\boxed{\frac{|x-\overline{x}|}{\sigma} > 2}$$

  Le choix du nombre 2 comme valeur seuil revient à dire qu'un évènement "rare" se produit dans environ 5% des cas. Ce choix de la valeur 2 plutôt qu'une autre est arbitraire, mais c'est devenu une norme dans le domaine des sciences. On verra plus loin comment la notion d'évènement rare intervient dans l'analyse d'un résultat expérimental.

1.5 Loi uniforme continue

Une loi uniforme continue décrit statistiquement un mesurage pour lequel la valeur de la grandeur est parfaitement équiprobable sur un certain intervalle de largeur Δ et nulle ailleurs.



- La valeur moyenne d'une distribution uniforme continue est égale à la médiane, il s'agit donc de la valeur centrale.

  $$\overline{X} = \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$$

- l'écart-type de cette distribution est égal à

  $$\sigma = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

  On ne détaille pas les probabilités de se trouver à plus d'un ou plusieurs écart-types de la moyenne. On retiendra qu'elles sont nécessairement différentes de celles de la gaussienne puisque la distribution uniforme continue est bornée.

1.6 Incertitude-type

L'incertitude sur la mesure d'une grandeur x est mesurée par la largeur de l'histogramme de ses valeurs, autrement dit par son **écart-type**.

> Def : On définit **l'incertitude-type** sur la mesure d'une grandeur x comme l'écart-type de la distribution des valeurs de x ; on la note $\boldsymbol{u(x)}$.

On définit l'**incertitude-type relative** par le rapport $|u(x)/x|$, exprimée généralement sous la forme d'un pourcentage.

2 Évaluation des incertitudes

Dans cette partie il s'agit de d'expliquer comment on accède concrètement à l'incertitude-type sur une grandeur mesurée, sachant que la distribution dont nous avons parlé dans la partie précédente est inconnue de l'expérimentateur ! Il y a deux manières différentes de procéder :

- l'expérimentateur cherche à accéder lui-même à la distribution des valeurs en réalisant plusieurs fois la même expérience et en analysant la dispersion des valeurs ; on parle de méthode de **type A** ;
- l'expérimentateur exploite des résultats statistiques déjà connus, il n'a pas besoin de répéter le mesurage ; on parle de méthode de **type B**.

2.1 Incertitude de type A

La méthode consiste à répéter un certain nombre N de fois le mesurage pour obtenir une liste de valeurs. Prenons l'exemple 3 de la partie 1 ; si l'on note x la position du centre de la masse mesurée sur la règle graduée alors on peut consigner les valeurs mesurées par différentes personnes dans un tableau :

n°	1	2	3	4	5	...	N
position x	3,942	3,918	3,955	3,925	3,930	...	3,934

À partir de cette liste on identifie l'incertitude-type $u(x)$ à **l'écart-type** des valeurs obtenues, dont on donne l'expression mathématique ci-dessous. La grandeur $\overline{x}$ désigne la **valeur moyenne** de x, dont on donne également l'expression :

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Cette méthode permet d'obtenir l'incertitude-type $u(x)$ **pour une mesure unique**, mais il y a encore mieux ; elle offre le moyen d'obtenir une estimation précise de x par calcul de la valeur moyenne. En effet les valeurs surestimées et sous-estimées se compensent en partie.

> Lorsque l'on répète N mesurages dans des conditions de répétabilité, on choisit comme estimateur la **moyenne arithmétique** $\overline{x}$ des N mesures obtenues. L'incertitude-type sur cette valeur est donc $u(\overline{x})$, dont on admet l'expression mathématique :
>
> $$\boxed{u(\overline{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}}$$

L'incertitude-type $u(\overline{x})$ est d'autant plus faible que N est élevé. On pourrait le vérifier en effectuant p séries de N mesurages et en regardant la dispersion des valeurs moyennes $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_p)$. Cela se comprend bien car plus le nombre de mesures est élevé et meilleure est notre connaissance de la distribution des valeurs. C'est l'une des raisons pour lesquelles la méthode de type A est très intéressante, si l'on a le temps et les moyens de répéter un grand nombre de fois le même mesurage.

Rq : Vous ne **devez pas taper manuellement** les sommes pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type ; ce serait très fastidieux, surtout si N est élevé. **Vous devez savoir utiliser l'outil "statistique" de votre calculatrice**. Vous rentrez la liste des N valeurs dans un tableau et la calculatrice fournit immédiatement la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type $u(x)$ (entre autres). Par contre, ce sera à vous de diviser par $\sqrt{N}$ pour avoir $u(\overline{x})$, pas de quoi se fouler l'index!

2.2 Incertitude de type B

Il arrive que, pour des raisons diverses, l'expérimentateur n'effectue qu'une seule fois son expérience, autrement dit il n'a accès qu'à un seul mesurage. Il peut quand même proposer une estimation d'incertitude sur cette valeur. Voici quelques exemples classiques.

2.2.1 Lecture d'un instrument gradué

Voici la marche à suivre lorsque l'on mesure une position avec un instrument gradué :

- estimer la valeur aussi précisément que possible, c'est-à-dire avec **au moins une décimale en-dessous de la graduation**. Par exemple, si la règle est graduée en millimètres, proposez une valeur allant jusqu'au dixième de millimètre.
- L'incertitude-type est $\boxed{u(x) = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}}$. Elle est estimée en faisant l'hypothèse (simplificatrice) d'une distribution uniforme continue de largeur égale à une graduation.

Il est à noter que l'incertitude-type n'est pas la même si le trait tombe exactement sur une graduation ou s'il tombe quelque part au hasard entre deux graduations. Souvent, lorsque l'on veut mesurer la distance entre deux points, on s'arrange pour placer la graduation zéro (ou un autre chiffre rond) exactement sur l'un des deux points. L'autre se situe alors le plus souvent entre deux graduations. Dans ce cas, on peut raisonnablement négliger l'incertitude sur la position du premier point devant celle du deuxième.

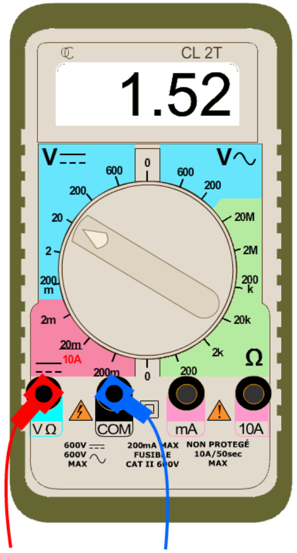
2.2.2 Utilisation d'un multimètre

Lorsque vous mesurez un grandeur électrique au multimètre, vous avez rarement le temps ou le matériel à disposition pour recommencer 50 fois le mesurage avec un appareil différent. Heureusement, le constructeur l'a fait à votre place! Il a consigné le résultat de ses analyses statistiques dans la notice alors autant en profiter pour gagner du temps. L'incertitude-type se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{u(x) = \frac{A(\%)x + B\delta x}{\sqrt{3}}}$$

où A et B sont deux nombres sans dimension fournis dans la notice (A est exprimé sous la forme d'un pourcentage), x est la valeur affichée et δx est la **résolution** de l'appareil, c'est-à-dire la plus petite valeur possible de x affichée à l'écran (attention, celle-ci dépend du calibre utilisé!).

Exemple :



Fonction	Calibre	Précision
Tension DC Impédance 10 Mohm	200,0 mV	±(0,5% +2d)
	2000 mV	
	20,00 V	
	200,0 V	
	600,0 V	±(0,8% + 2d)
Tension AC Impédance 10 Mohm	200,00 V	±(1,2% + 3d)
	600,0 V	
Courant DC	2000 µA	±(1% +2d)
	20,00 mA	
	200,0 mA	
	10,00mA	±(2% +5d)
Résistance	200,0 Ω	±(0,8% + 5d)
	2000 Ω	
	20,00 kΩ	
	200,0 kΩ	
	2000 kΩ	
	20,00 MΩ	±(1% + 5d)
	200,0 MΩ	±(5% + 10d)

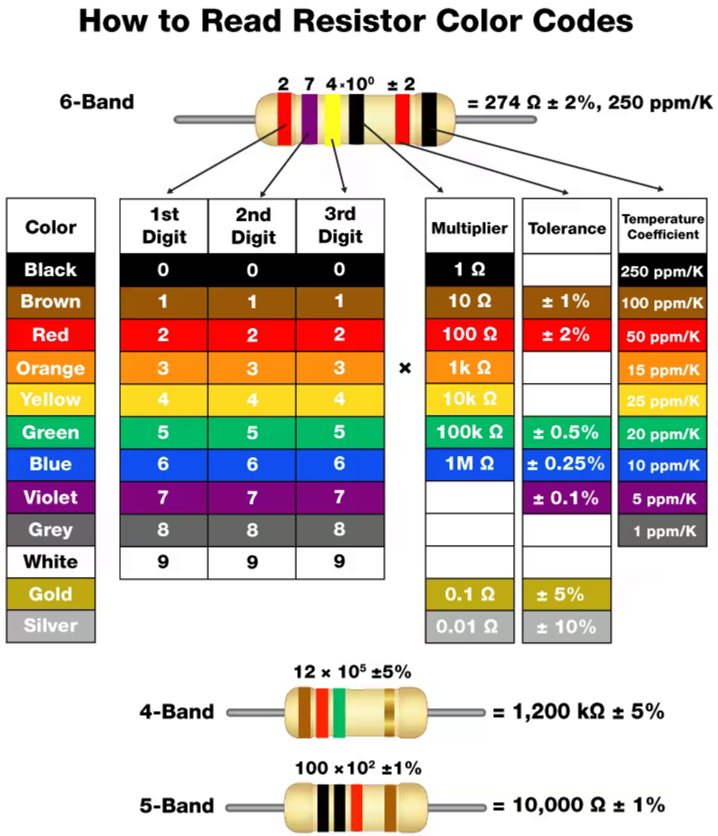
Le multimètre ci-dessus est utilisé en tant que voltmètre, en mode DC (symbole ⎓ pour le mesurage d'une tension continue), sur le calibre 20 V (cela signifie que le voltmètre est capable d'afficher la valeur de toute tension **inférieure à 20V**).
La valeur affichée est $U = 1{,}52\,\text{V}$, la résolution est donc $\delta U = 0{,}01\,\text{V}$. On lit les valeurs de A et B dans la case adéquate de la notice (Tension DC, calibre 20 V) : $A = 0{,}5\% = 5\cdot 10^{-3}$ et $B = 2$. On en déduit l'incertitude-type et l'incertitude-type relative sur la tension mesurée :

$$u(U) = \frac{5\cdot 10^{-3}\times 1{,}52 + 2\times 0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}016\,\text{V} \qquad \text{et} \qquad \frac{u(U)}{U} = \frac{0{,}016}{1{,}52} = 1{,}0\%$$

Application : Compte tenu de la valeur de tension affichée on aurait pu utiliser le calibre 2 V. Dans ce cas on observerait que le multimètre affiche $\boxed{1.526}$. Calculer à nouveau l'incertitude-type puis l'incertitude-type relative et conclure.

2.2.3 Instrument/composant affichant une tolérance

Revenons sur l'exemple 2 de la partie 1. On s'intéresse à un résistor dont la résistance est indiquée par le fabricant (par exemple $R = 200\,\Omega$). Il y a une incertitude sur cette valeur car **le fabricant ne peut réaliser des résistors parfaitement identiques les uns aux autres**. Chacun d'entre eux est unique et possède une valeur particulière de résistance électrique. Tous les résistors d'un certain modèle ont donc des valeurs de résistance dispersées sur un certain intervalle. Le fabricant doit s'assurer que la valeur moyenne pour un grand nombre de résistors s'identifie à la valeur nominale (par exemple $R = 200\,\Omega$) et il donne l'information sur la dispersion des valeurs, sous la forme d'une grandeur appelée **tolérance**, le plus souvent exprimée en pourcentage de la valeur nominale sous la forme ±...%. Pour un résistor la tolérance est généralement indiquée sur le composant par un anneau coloré.



Lorsqu'une valeur est donnée avec une certaine tolérance alors l'incertitude-type vaut :

$$\boxed{u(x) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}}}$$

Par exemple, pour une résistance électrique $R = 274\,\Omega$ de tolérance 2%, l'incertitude-type vaut :

$$u(R) = \frac{0{,}02\times 274}{\sqrt{3}} = 3{,}2\,\Omega$$

2.2.4 Autres situations

Pour toute situation qui ne correspond pas à l'une des règles précédentes, on attendra de vous (en TP et aux concours si vous passez une épreuve de TP) de **proposer une valeur raisonnable** d'incertitude, fondée sur votre sens physique et votre expérience de manipulateur. Dans le domaine des incertitudes, il est très difficile d'être rigoureux ; on attendra principalement de vous que vous fassiez preuve de bon sens.

IMPORTANT : Souvent, certaines sources d'incertitude sont négligeables devant d'autres. Avant de chercher à les quantifier, on peut faire un tri et négliger les contributions qui semblent les plus faibles.

2.3 Cas où les sources d'incertitude sont multiples

Parfois, il existe plusieurs sources d'incertitude différentes pour la même grandeur physique. Par exemple, lorsque vous mesurez un volume équivalent à la burette graduée, on peut estimer que l'incertitude sur cette valeur est due :

- à la lecture sur l'échelle graduée,
- à l'estimation de l'équivalence (virage de l'indicateur coloré, saut de pH, etc).

Dans le cas où l'incertitude sur une mesure x dépend de deux sources d'incertitudes **indépendantes**, pour lesquelles on a déterminé séparément les incertitudes-type associées $u_1(x)$ et $u_2(x)$ alors l'incertitude-type résultante se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{u(x) = \sqrt{u_1(x)^2 + u_2(x)^2}}$$

Par souci de simplicité, on vérifiera tout de même si l'une des sources est prépondérante. Si c'est le cas, on négligera les autres.

3 Incertitude-type composée

3.1 Introduction

Dans cette partie on s'intéresse à la manière dont les incertitudes se propagent lorsque l'on utilise des mesures dans un calcul. Pour simplifier, nous imaginons que l'on utilise deux mesures $y\,;\,u(y)$ et $z\,;\,u(z)$ **indépendantes l'une de l'autre** pour obtenir la mesure d'une troisième grandeur $x\,;\,u(x)$.

3.2 Forme linéaire

Dans le cas où $x = \alpha y + \beta z$ avec α et β deux constantes réelles alors :

$$\boxed{u(x) = \sqrt{\left(\alpha u(y)\right)^2 + \left(\beta u(z)\right)^2}}$$

Application : On mesure au chronomètre la période des oscillations d'un pendule simple. On estime l'incertitude-type sur la date t_d du déclenchement et la date t_a de l'arrêt du chronomètre à 0, 1 s. Déterminez l'incertitude-type sur la durée Δt mesurée au chronomètre. Justifier qu'il est avantageux de mesurer plusieurs périodes d'oscillation au lieu d'une seule.

3.3 Loi de puissance

Dans le cas où $x = \text{Cste} \times y^\alpha z^\beta$ avec α et β deux exposants réels alors :

$$\boxed{\frac{u(x)}{|x|} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(z)}{z}\right)^2}}$$

Application : On mesure la tension U aux bornes d'un résistor et l'intensité I dans sa branche. On obtient :

$$U = 5,752\,\text{V}\,;\; u(U) = 0,047\,\text{V} \qquad \text{et} \qquad I = 29,32\,\text{mA}\,;\; u(I) = 0,58\,\text{mA}$$

Déterminer la résistance électrique du résistor et son incertitude-type associée en utilisant la loi d'Ohm.

3.4 Méthode de Monte-Carlo

Une méthode de Monte-Carlo est une méthode numérique d'évaluation d'une incertitude-type composée. Si l'on reprend l'exemple ci-dessus, elle consiste à tirer aléatoirement, un très grand nombre de fois, un couple de valeurs (y, z) puis à calculer l'incertitude-type des valeurs de x obtenues. Cette méthode suppose que la loi de probabilité pour y et celle pour z sont toutes les deux connues. Il est généralement très simple de coder en Python une procédure pour tirer aléatoirement des nombres avec une loi de probabilité connue. Cette méthode offre plusieurs avantages :

- elle permet de réaliser une étude statistique sur un très grand nombre d'itérations de façon beaucoup plus rapide et efficace qu'en répétant des mesurages,
- elle est simple à coder en Python,
- elle donne des résultats aussi justes que l'on souhaite, à condition que le nombre d'itérations soit suffisamment élevé,
- elle permet non seulement de calculer $u(x)$ mais également de connaître la manière dont les valeurs de x sont dispersées,
- elle permet de tester indépendamment l'influence de y et celle de z sur la valeur de x.
- elle est correcte même si y et z ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

4 Chiffres significatifs

4.1 Écriture d'un résultat

La mesure d'une grandeur physique s'écrit sous la forme d'une valeur, accompagnée de son unité, associée à une incertitude-type. On illustre sur un exemple :

$$g = 9,752\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\,;\; u(g) = 0,018\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

On rencontre parfois d'autres écritures :

- $g = (9,752 \pm 0,018)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- $g = 9,752(18)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Rq : Attention, il arrive que la valeur écrite derrière un ± ne soit pas une incertitude-type. L'écriture explicite d'une incertitude-type avec la notation $u(x)$ permet de savoir sans ambiguïté de quel type d'incertitude on parle, c'est pourquoi elle est préférable.

4.2 Résultat d'un mesurage

Lorsqu'on écrit le résultat d'un mesurage sous la forme $x\,;\ u(x)$, le nombre de chiffres écrit suit certaines règles. Notamment, les chiffres écrits doivent porter de l'information. Cela ne signifie pas que l'on soit certain de leur valeur, mais plutôt que cette valeur n'est pas complètement le fait du hasard. On parle de **chiffre significatif**. Il n'est bien sûr pas nécessaire d'écrire un résultat avec 50 chiffres, la quasi-totalité sont "noyés" dans les incertitudes, ils ne sont pas significatifs. On retient les critères suivants :

- le dernier chiffre de x doit être de même rang décimale que celui de $u(x)$;
- On garde généralement **deux chiffres** significatifs pour $u(x)$, parfois un seul si la précision de x est limitée par la résolution de l'instrument.

Ex 1 : voltmètre utilisé sur la calibre 20 V (voir 2.2.2). Le résultat est $U = 1,52\,\mathrm{V}\,;\ u(U) = 0,02\,\mathrm{V}$.

Ex 2 : dix élèves réalisent chacun de leur côté le même dosage et mesurent le volume à l'équivalence V_{eq}. Les résultats expérimentaux sont groupés dans le tableau ci-dessous :

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{eq} (mL)	9,6	10,3	10,2	10,5	11,0	9,2	10,3	9,9	9,2	9,6

Déterminer le résultat du dosage avec son incertitude-type associé.

4.3 Dans l'énoncé d'un exercice

Dans l'énoncé d'un exercice, les valeurs ne sont quasiment jamais données avec leur incertitude. Dans ce cas, il faut admettre que le nombre de chiffres donnés dans l'écriture des grandeurs révèle la précision que l'on a sur ces valeurs, autrement dit que ce sont l'ensemble des chiffres significatifs connus. Pour écrire le résultat d'une application numérique, on appliquera la règle suivante :

> Si dans un calcul on doit se servir de plusieurs grandeurs fournies sans leur incertitude alors le nombre de chiffres significatifs donnés dans le résultat *est égal au nombre de chiffres significatifs le plus faible parmi les données.*

Cette règle n'est pas toujours pertinente mais on l'utilisera pour sa simplicité, faute de mieux.

4.4 Comparaison de deux valeurs : écart normalisé

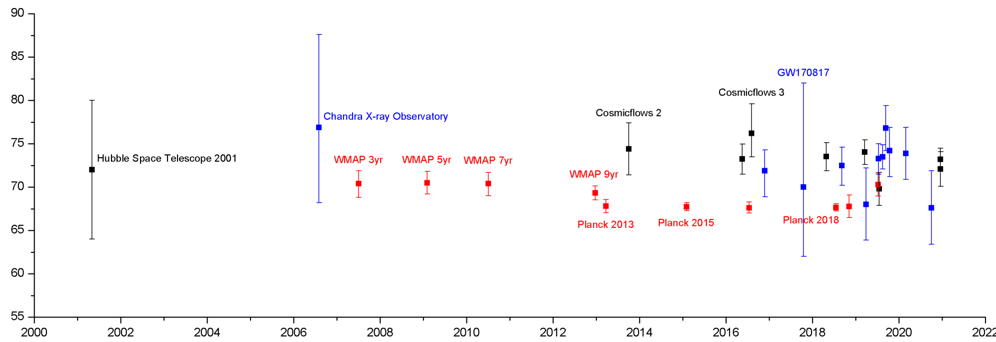
4.4.1 Notion de biais, valeur de référence

On a vu qu'une incertitude traduit une dispersion des mesures produites par des phénomènes **aléatoires**. On parle de biais lorsqu'un facteur influence les valeurs mesurées de manière **systématique**, autrement dit lorsqu'il conduit systématiquement à des valeurs trop élevées ou trop basses comparées à la **valeur de référence**.

> On appelle valeur de référence (ou "valeur vraie") la mesure théorique que l'on obtiendrait en l'absence de biais et de sources d'incertitudes.

En théorie on peut détecter la présence d'un biais en comparant la mesure à la valeur de référence ; malheureusement celle-ci est généralement inconnue ! C'est pourquoi il est très difficile de détecter un biais dans un mesurage.

Illustrons sur un exemple : on observe que l'univers est en expansion car les galaxies s'éloignent les unes des autres avec une vitesse proportionnelle à la distance qui les sépare (ce phénomène a été prédit et observé par Edwin Hubble et Georges Lemaître à la fin des années 1920). La constante de proportionnalité entre la vitesse d'éloignement de deux galaxies et la distance qui les sépare s'appelle la **constante de Hubble** ; elle quantifie le taux d'expansion de l'univers à un instant donné. On connaît aujourd'hui plusieurs manières différentes de déterminer la constante de Hubble et différents résultats expérimentaux récents sont indiqués sur la figure ci-dessous.



Source : *Wikipedia*

Pour détecter la présence éventuelle d'un biais dans les mesurages on compare entre elles des valeurs ayant été obtenues indépendamment les unes des autres ; il s'agit de déterminer si les valeurs obtenues sont **compatibles entre elles**, c'est-à-dire si les écarts entre ces valeurs s'expliquent uniquement par les incertitudes de mesure. Nous allons voir dans cette sous-partie sur quel critère on peut dire que deux résultats expérimentaux sont cohérents ou non entre eux.

4.4.2 Comparaison avec une valeur de référence

On souhaite par exemple déterminer expérimentalement, au laboratoire du lycée, la valeur du champ de pesanteur terrestre à la latitude d'Amiens (TP n°1!). Dans ce cas de figure une valeur de référence existe, on la trouve dans les tables (elle a été confirmée par de nombreuses observations indépendantes et n'est plus sujet à discussion, du moins si l'on s'en tient à une précision de trois chiffres significatifs) : $g_{\mathrm{ref}} = 9,81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Par la suite, **nous négligerons l'incertitude sur cette valeur de référence devant l'incertitude sur la valeur mesurée en TP**. La finalité de l'expérience consiste à proposer une mesure g_{exp} et à détecter la présence éventuelle d'un biais en la comparant, de façon argumentée, à g_{ref}.

On imagine que l'on obtient comme résultat :

$$g_{\text{exp}} = 9,712\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\ ;\ u(g_{\text{exp}}) = 0,072\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Pour savoir si cette valeur est **compatible** avec la valeur de référence, on calcule l'**écart normalisé** entre ces deux valeurs :

$$\boxed{\text{EN} = \frac{\left|g_{\textbf{exp}} - g_{\textbf{ref}}\right|}{u(g)}}$$

D'après ce que l'on a vu dans la partie 1, on considère comme un évènement rare (5% des cas) :

$$\frac{\left|g_{\text{exp}} - g_{\text{ref}}\right|}{u(g)} > 2$$

Sachant cela, voici comment l'on compare g_{exp} et g_{ref} :

- si EN ≤ 2, on considère que l'écart entre g_{exp} et g_{ref} peut s'expliquer par la variabilité liée au mesurage. Il n'y a pas de raison *a priori* de penser qu'il y a un biais. On dit que g_{exp} et g_{ref} sont des valeurs compatibles entre elles.
- si EN > 2, on considère que l'écart entre g_{exp} et g_{ref} n'est pas le fait du hasard. Pour l'exemple du mesurage de g, on conclura qu'il y a un biais dans le mesurage (g_{exp} n'est pas compatible avec g_{ref}).

Ce critère n'est pas parfait ; si effectivement il n'y a pas de biais nous avons environ 5% de chances de déclarer à tort qu'il y en a un. On peut bien sûr réduire les chances de se tromper en prenant un seuil plus élevé (EN > 3 ou davantage) mais alors on prend le risque inverse, à savoir considérer que l'écart s'explique par le hasard alors qu'il existe un biais.

Il n'y a pas de critère absolu pour déterminer avec certitude qu'un évènement est ou n'est pas le fruit du hasard. Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Il peut varier selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, on cherche à savoir si le résultat d'une expérience peut s'expliquer par le hasard ou s'il est effectivement dû à l'existence de la particule hypothétique. Le seuil choisi est EN > 5, ce qui signifie qu'il doit y avoir moins d'une chance sur un million d'affirmer à tort qu'il existe une nouvelle particule.

Dans le cas de notre mesure de g :

$$\text{EN} = \frac{9,81 - 9,712}{0,072} = 1,4 < 2$$

On conclut que la valeur mesurée est compatible avec la valeur de référence.

On comprend aisément que ce critère n'a de sens que si l'on a pris soin d'évaluer proprement l'incertitude. Si la valeur de l'écart normalisé semble étonnamment élevée ou faible, il conviendra de porter un regard critique sur la manière dont on a évalué les incertitudes.

4.4.3 Comparaison de deux mesures d'incertitudes-types comparables

Pour savoir si deux mesures x_1 et x_2 sont compatibles alors qu'on ne peut pas négliger l'incertitude-type sur l'une ou l'autre alors on utilise la formule suivante, plus générale, pour l'écart normalisé :

$$\boxed{\text{EN} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}}$$

Revenons à l'exemple de la constante de Hubble ; nous avons vu qu'il n'y a pas de valeur de référence. Comparons deux valeurs de la constante de Hubble H_0 mesurées par deux techniques différentes :

- observation de céphéides du Grand Nuage de Magellan par le télescope spatial Hubble (2019) : $H_0 = 74,03 \pm 1,42\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$;
- analyse des observations du fond diffus cosmologique effectuées par le satellite Planck (2020) : $H_0 = 67,4 \pm 0,5\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$.

L'écart normalisé vaut :

$$\text{EN} = \frac{74,03 - 67,4}{\sqrt{1,42^2 + 0,5^2}} = 4,4$$

Les deux valeurs ne sont pas compatibles entre elles ! À l'heure actuelle les mesures de la constante de Hubble s'appuient bien entendu sur des observations mais aussi sur des modèles utilisant les équations de la relativité générale et qui intègrent des hypothèses sur la répartition de matière visible, de matière noire et d'énergie noire dans l'univers. Le fait que deux valeurs de H_0 ne sont pas compatibles entre elles ne signifie pas forcément qu'il existe un biais dans les mesures ; on peut également remettre en cause les hypothèses des modèles utilisés pour exploiter les données expérimentales brutes.