Devoir n°1 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{x}{2}} = 2 \ ; \ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \ ; \ e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$$

EXERCICE 2

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}.$$

EXERCICE 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Étudier f (limites, variations, tracé). On précisera la position de la courbe par rapport à sa tangente à l'origine.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ et $f(f(f(f(x))))$, puis conjecturer une formule générale et la démontrer.

EXERCICE 4

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 5

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut se décomposer de manière unique comme somme d'une fonction constante et d'une fonction qui s'annule en 0.