Correction du DNS 2

EXERCICE 1

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=1}^{n}1+2i\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}j^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= n\sum_{i=1}^{n}i^2+n(n+1)\sum_{i=1}^{n}i+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n}1 \\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^2(n+1)(2n+1)+3n^2(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)(4n+2+3n+3)}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) Attention : le rang initial est q.

Pour $n=q$ on a $\displaystyle\sum_{k=q}^{q}\binom{k}{q}=\binom{q}{q}=1=\binom{q+1}{q+1}$.

Soit $n\geqslant q$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$. Alors

$$\sum_{k=q}^{n+1}\binom{k}{q}=\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}+\binom{n+1}{q}=\binom{n+1}{q+1}+\binom{n+1}{q}=\binom{n+2}{q+1}$$

d'après la formule de Pascal.

D'après le théorème de récurrence on a donc bien $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $q\geqslant n$.

2) Pour $q=1$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}$, soit

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $q=2$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$, soit $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ qui donne

$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Enfin pour $q=3$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}$, soit $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$ qui donne

$$\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k+2)=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}.$$

EXERCICE 3

1) On a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$
$$S_3 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$$
$$T_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$
$$T_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$
$$U_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \frac{1}{2}$$
$$U_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$
$$U_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{37}{60}.$$

2) a) On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

puis

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}, \end{aligned}$$

et enfin

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

b) Première méthode : on raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$ on a vu à la question 1 que $S_1 = T_1 = U_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = T_n = U_n$. D'après la question précédente, on a $S_{n+1} - S_n = T_{n+1} - T_n = U_{n+1} - U_n$, donc $S_n + S_{n+1} - S_n = T_n + T_{n+1} - T_n = U_n + U_{n+1} - U_n$, soit $S_{n+1} = T_{n+1} = U_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a donc $S_n = T_n = U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Deuxième méthode : avec des sommes télescopiques. D'après la question précédente, on a $S_{k+1} - S_k = T_{k+1} - T_k = U_{k+1} - U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (T_{k+1} - T_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (U_{k+1} - U_k)$$

qui donne après télescopage $S_n - S_1 = T_n - T_1 = U_n - U_1$, d'où $S_n = T_n = U_n$ puisque $S_1 = T_1 = U_1$.

3) a) Les fonctions f et g sont dérivables sur $]1, +\infty[$ d'après les théorèmes généraux de dérivabilité. Pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1) - x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x^2(x-1)} < 0.$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante et la fonction g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

On a $f(1) = \ln 2 - 1$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\ln \frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

b) D'après son tableau de variations, la fonction f est négative : pour tout $x > 1$ on a $\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$, donc $\ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

De même la fonction g est positive : pour tout $x > 1$ on a $\ln x - \ln(x-1) - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$, donc $\ln x - \ln(x-1) \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x > 1$ on a donc bien $\ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-1)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $n + k > 1$ donc d'après ce qui précède

$$\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln(n+k) - \ln(n+k-1).$$

En sommant on obtient l'encadrement demandé :

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) \leqslant T_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(n+k-1)).$$

5) Les sommes ci-dessus sont télescopiques :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \\
&= \ln(n+2) + \ln(n+3) + \ldots + \ln(2n+1) - (\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(2n)) \\
&= \ln(2n+1) - \ln(n+1) \\
&= \ln \frac{2n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(n+k-1)) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k-1) \\
&= \ln(n+1) + \ln(n+2) + \ldots + \ln(2n) - (\ln(n) + \ln(n+1) + \ldots + \ln(2n-1)) \\
&= \ln(2n) - \ln(n) \\
&= \ln \frac{2n}{n} \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Ces deux sommes tendent vers $\ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$ (car $\dfrac{2n+1}{n+1} = \dfrac{2 + 1/n}{1 + 1/n}$ tend vers 2).

D'après l'encadrement de la question 4 et le théorème des gendarmes, la suite (T_n) tend aussi vers $\ln 2$.