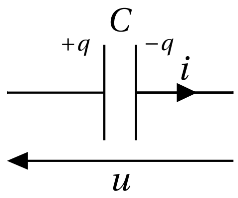
Chapitre 6 : Régime transitoire du premier ordre

1 Condensateur et bobine

1.1 Condensateur idéal

1.1.1 Symbole, principe de fonctionnement

Un condensateur est un composant constitué de deux plaques métalliques en regard (les armatures) séparées par une couche de matériau isolant. Lorsqu'on impose une tension U aux bornes d'un condensateur, des charges électriques de signes opposées $\pm q$ apparaissent à la surface des deux armatures. La charge qui apparaît est proportionnelle à la tension appliquée :



$$\boxed{q = Cu}$$

Où C est appelée la **capacité** du condensateur, exprimée en *farads* (F).

Un condensateur réel est faiblement dissipatif. On parle de condensateur idéal lorsqu'on néglige son aspect résistif. Le condensateur est très utilisé en électronique car il dissipe très peu d'énergie. Par contre, il peut stocker provisoirement de l'énergie électrique pour la rendre plus tard au circuit électrique (C'est par exemple le principe du flash des anciens appareils photo jetables : de l'énergie est stockée dans un condensateur puis est libérée très rapidement pour produire un flash lumineux).

1.1.2 Loi d'évolution

Lorsque le condensateur est alimenté en régime variable, la relation d'évolution s'écrit, **en convention récepteur**, sous la forme :

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

En régime stationnaire, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

> Le courant qui traverse le condensateur ne peut être infini. Cela impose qu'à tout instant, **la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps**.

1.1.3 Puissance reçue

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur s'écrit :

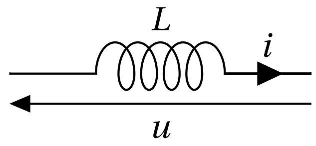
$$\boxed{\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad \mathscr{E}_c(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)}$$

- $\mathscr{E}_c(t)$ représente l'énergie emmaganisée, à un instant t, par le condensateur.
- Le condensateur ne dissipe pas d'énergie. Il fonctionne de manière réversible : il peut emmagasiner de l'énergie electrique puis la restituer au circuit.

1.2 Bobine idéale

1.2.1 Symbole, principe de fonctionnement

Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur. Le comportement d'une bobine repose sur le principe de l'induction électromagnétique (vu en fin d'année). Elles sont omniprésentes en électronique car elles dissipent peu d'énergie et permettent, comme les condensateurs, de stocker de manière réversible de l'énergie électrique. Elles sont également à la base du fonctionnement des moteurs électriques et des générateurs de courant. Enfin, elles sont utilisées pour leur capacité à produire un champ magnétique (IRM, accélérateur de particule,...).



Une bobine réelle, à cause de la longueur de fil nécessaire à sa construction, est légèrement dissipative. On parle de bobine idéale lorsqu'on néglige son aspect résistif.

1.2.2 Loi d'évolution

A cause du phénomène d'auto-induction, une tension apparaît aux bornes de la bobine lorsque le courant qui la traverse est variable. La tension est proportionnelle aux variations de l'intensité, selon la loi d'évolution suivante, **en convention récepteur** :

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

Où L est appelée l' **inductance** de la bobine, exprimée en *henry* (H).

En régime stationnaire, une bobine se comporte comme un fil.

> La tension aux bornes d'une bobine ne peut être infinie. Cela impose qu'à tout instant, **le courant qui traverse une bobine est une fonction continue du temps**.

1.2.3 Puissance reçue

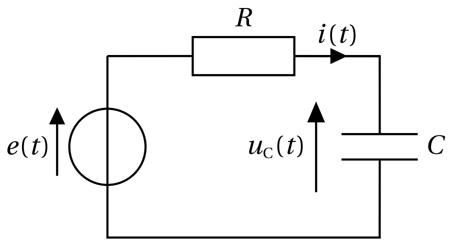
En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur s'écrit :

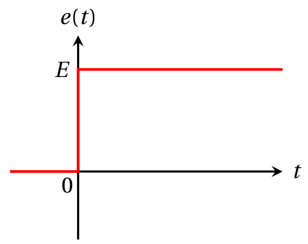
$$\boxed{\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad \mathscr{E}_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)}$$

- $\mathscr{E}_L(t)$ représente l'énergie emmaganisée, à un instant t, par la bobine.
- La bobine ne dissipe pas d'énergie. Elle fonctionne elle aussi de manière réversible: elle peut emmagasiner de l'énergie electrique puis la restituer au circuit.

2 Circuit RC série

2.1 Circuit RC série soumis à un échelon de tension





Un circuit RC série est initialement tel que $i = 0$ et $u_C = 0$. À $t = 0$, on soumet le circuit à un échelon de tension, la fem du générateur valant E. On va étudier la réponse temporelle du circuit $(u_C(t), i(t))$.

2.1.1 Équation d'évolution

Le circuit RC série est un système du premier ordre, c'est-à-dire qu'il vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. La tension $u(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante, écrite sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{U_\infty}{\tau}}$$

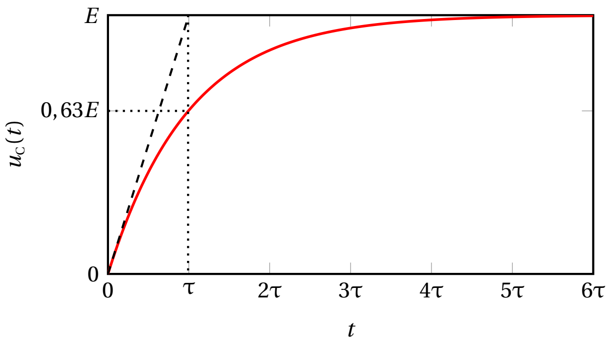
Où $\tau = RC$ est le temps caractéristique du circuit et $U_\infty = E$ est la tension aux bornes du condensateur en régime permanent.

2.1.2 Loi horaire de la tension aux bornes du condensateur

La tension $u_C(t)$ suit une croissance exponentielle tendant vers l'asymptote horizontale E :

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})}$$

Le régime transitoire a une durée caractéristique τ. Une fois le régime transitoire terminé, on aboutit à un régime permanent stationnaire, qui correspond à la solution particulière de l'équation différentielle.



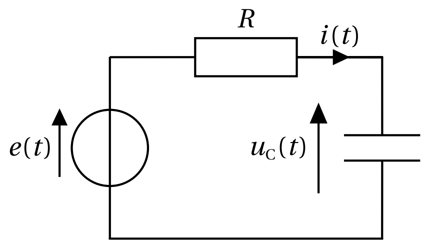
2.1.3 Étude énergétique

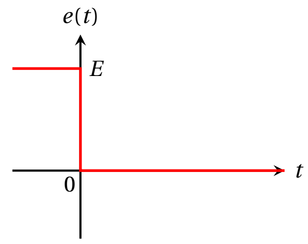
Entre $t = 0$ et $t = \infty$, on cherche à déterminer l'énergie $\mathscr{E}_g$ fournie par le générateur au circuit ainsi que l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans la résistance et l'énergie $\mathscr{E}_c$ stockée par le consateur. Par définition :

$$\mathscr{E}_g = \int_0^\infty \mathscr{P}_g \mathrm{d}t = \int_0^\infty E i \mathrm{d}t \qquad W_J = \int_0^\infty \mathscr{P}_J \mathrm{d}t = \int_0^\infty R i^2 \mathrm{d}t \qquad \mathscr{E}_c = \int_0^\infty \mathscr{P}_c \mathrm{d}t = \int_0^\infty u_c i \mathrm{d}t$$

> Au cours de la charge, entre $t = 0$ et $t = \infty$, le générateur fournit au circuit une énergie $\mathscr{E}_E = CE^2$. Cette énergie est répartie à parts égales entre la résistance, qui la dissipe par effet Joule et le condensateur qui l'emmagasine.

2.2 Application : régime libre du circuit RC série



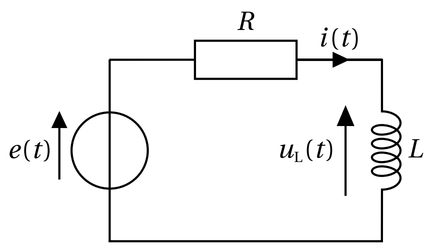


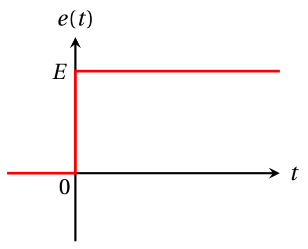
En régime libre, le circuit n'est pas alimenté. On suppose qu'à $t = 0^-$, le condensateur est chargé avec la tension E (on fait l'hypothèse qu'il s'est écoulé suffisamment de temps pour que la charge du condensateur par la fem E soit terminée avant la date $t = 0$).

Faire l'étude complète du circuit en régime libre : Equation différentielle vérifiée par $u_C(t)$, résolution de l'équa diff, graphe de $u_C(t)$, expression de $i(t)$, allure du portrait de phase et étude énergétique (énergie échangée entre le condensateur et la bobine entre $t = 0$ et $t = \infty$).

3 Circuit RL série

3.1 Circuit RL série soumis à un échelon de tension





3.1.1 Équation d'évolution

Le circuit RL série est également un système du premier ordre. Il est caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{I_\infty}{\tau}}$$

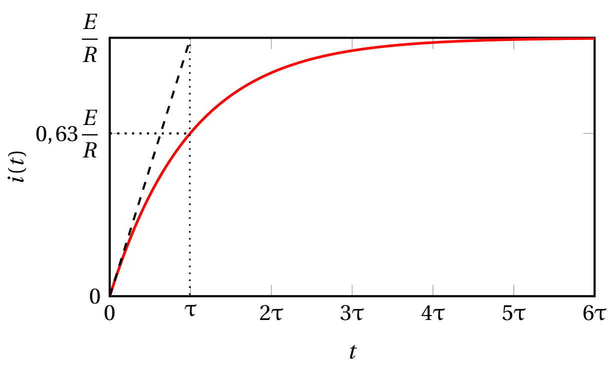
Où $\tau = \frac{L}{R}$ est le temps caractéristique du circuit et $I_\infty = \frac{E}{R}$ est le courant qui traverse le circuit en régime permanent.

3.1.2 Loi horaire du courant traversant la bobine

Le courant $i(t)$ suit une croissance exponentielle tendant vers l'asymptote horizontale $\frac{E}{R}$:

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})}$$

Le régime transitoire a une durée caractéristique τ. Une fois le régime transitoire terminé, on aboutit à un régime permanent stationnaire, qui correspond à la solution particulière de l'équation différentielle.



3.1.3 Étude énergétique

La bobine emmagasine une énergie $\mathscr{E}_L = \frac{LE^2}{2R^2}$ au cours de la charge. En régime permanent, le courant $I_\infty = \frac{E}{R}$ est non nul. La bobine ne reçoit plus d'énergie et toute la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance.