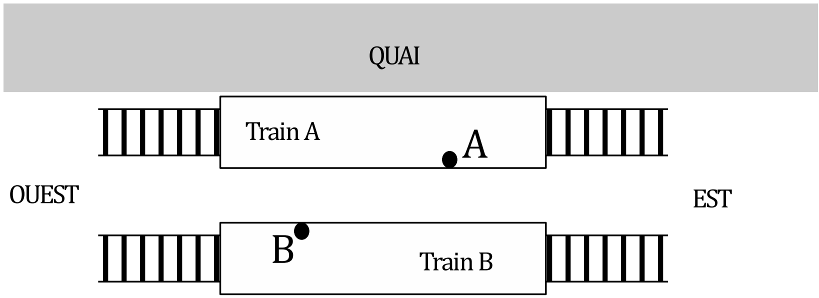
Chapitre 7 : Cinématique

1 Repérage d'un point dans l'espace et le temps

1.1 Référentiel

Un mouvement est perçu différemment par deux observateurs qui sont eux-même en mouvement relatif. Prenons l'exemple deux trains arrêtés en gare. Deux observateurs, A et B regardent chacun le train d'en face.



Le train A se met en mouvement en direction de l'ouest. Le train B reste immobile.

- Pour A, c'est le train B qui se dirige vers l'est,
- Pour B, c'est le train A qui se dirige vers l'ouest.

Ce même mouvement implique deux conclusions différentes, à priori, pour chaque observateur, car **un mouvement est relatif à un observateur**. En particulier, la position, la vitesse ou l'accélération d'un corps en mouvement ne sont pas des grandeurs absolues mais relatives à un observateur.

Pourtant, entre les trains A et B, un seul a son moteur effectivement en marche. Pour savoir lequel, il est nécessaire de se fier à une référence.

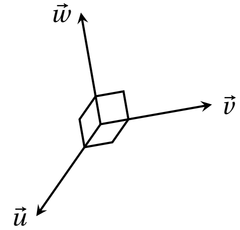
<u>Def</u> : L'ensemble des points immobiles par rapport à un observateur constitue le **référentiel** lié à cet observateur.
En particulier, l'ensemble des points immobiles par rapport à la Terre constitue le **référentiel terrestre**.

Par conséquent, un référentiel est rigide et indéformable. Un solide, par exemple, peut constituer un référentiel car tous les points d'un solide sont immobiles les uns par rapport aux autres.

1.2 Base orthonormée directe

Un **vecteur unitaire** est un vecteur dont la norme égale à l'unité (c'est donc nécessairement un vecteur sans dimension).

Une **base orthonormée** est une famille de vecteurs unitaires orthogonaux les uns aux autres. Par exemple, en dimension 3, une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ peut être représentée graphiquement de la manière ci-contre, avec :

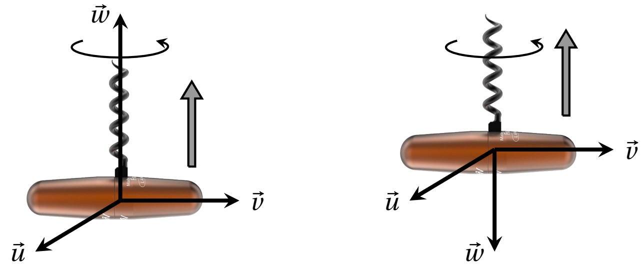


$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$$

Une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dite **directe** si et seulement si :

1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient <u>la règle du tire-bouchon</u> : **Si un tire-bouchon, tournant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, progresse dans le sens du vecteur $\vec{w}$, alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe.**



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ indirecte

1.3 Repère

<u>Def</u> : Un repère (noté $\mathscr{R}$) est un objet mathématique qui permet de repérer la position d'un objet dans l'espace. Un repère est constitué :

- d'une origine
- d'une base orthonormée directe.

L'intérêt du repère tient dans la propriété mathématique suivante :

Tout vecteur de l'espace peut être décomposé **de manière unique** selon les vecteurs d'une base orthonormée.

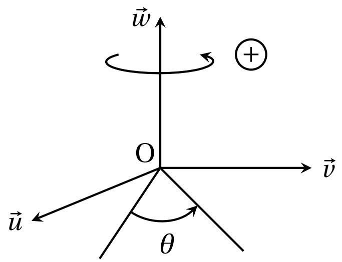
Soit $\vec{A}$ un vecteur de l'espace et $\mathscr{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormée directe de l'espace. La décomposition de $\vec{A}$ dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit :

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$

- Le vecteur $A_x \vec{u}_x$ s'appelle **la projection** de $\vec{A}$ sur le vecteur $\vec{u}_x$.
- (A_x, A_y, A_z) sont les **coordonnées** de $\vec{A}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1.4 Angle orienté

On considère un repère orthonormé direct et $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base orthonormée associée à ce repère. On veut repérer un angle orienté dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ par exemple.



Pour déterminer le signe de l'angle θ, on utilise la règle suivante :

> Un tire-bouchon qui progresse dans le sens de $\vec{w}$ tourne dans le sens positif.

1.5 Vecteur position

La position d'un point P de l'espace est repérée par rapport à l'origine d'un repère. Dans un repère $\mathscr{R}$ d'origine O, le vecteur position est défini par :

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$

1.6 Vecteur vitesse

Si un point mobile suit une trajectoire allant d'un point P (à la date t) jusqu'à un point P' (à la date t'), on définit sa **vitesse moyenne** entre P et P par :

$$\boxed{\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP'}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{t' - t} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PP'}}}{\Delta t}}$$

Si un point mobile P suit une trajectoire definie par une courbe $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}(t)$ alors on définit la **vitesse instantanée** du point P par :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OP}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$

- La vitesse instantanée est toujours <u>tangente</u> à la trajectoire.
- Un mouvement dans lequel $\|\vec{v}\|$ se conserve est appelé mouvement **uniforme**.
- Un mouvement dans lequel $\vec{v}$ se conserve est **rectiligne et uniforme**.

1.7 Vecteur accélération

Si un point mobile P suit une trajectoire definie par une courbe $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}(t)$ alors on définit l' accélération du point P par :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + \mathrm{d}t) - \vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}$$

- L'accélération est égale à la dérivée temporelle du vecteur vitesse.
- Un point mobile peut avoir une vitesse constante en norme mais une accélération non nulle. (ex : mouvement circulaire uniforme)

1.8 Cinématique classique

1.8.1 Postulat du temps absolu

> La durée qui sépare deux évènements est toujours identique du point de vue de deux observateurs en mouvement relatif.

Par exemple, imaginons 2 observateurs qui synchronisent leurs horloges à un endroit donné, à un instant donné et se mettent en mouvement l'un par rapport à l'autre. S'ils se retrouvent un peu plus tard et comparent les temps t et t' affichés sur leur horloge alors on aura toujours $t = t'$. Le temps est une coordonnée **universelle**. La physique newtonienne repose sur ce postulat.
En réalité, on sait depuis les travaux d'Einstein et de Lorentz que ce postulat est faux : il est mis en défaut dans certains cas :

- <u>pour des objets se déplaçant à des vitesses proches de c</u> : c'est par exemple le cas des muons (une sorte d'électron très lourd) produits dans l'atmosphère à la suite de collisions entre des rayons cosmiques très énergétiques et des atomes de l'atmosphère. Les muons sont instables et se désintègrent rapidement en d'autres particules élémentaires. Le temps de demi-vie des muons est connu (2,2 µs), or celui mesuré pour les muons des gerbes atmosphériques est supérieur à la valeur attendue. Cet effet de dilatation du temps, dû à la vitesse élevée de ces muons, proche de c, est prédit dans le cadre de la **relativité restreinte**. La demi-vie est bien égale à 2,2 µs *dans le référentiel lié aux muons*, mais elle est différente du point de vue d'un observateur qui voit les muons se déplacer à grande vitesse.

- pour des objets situés dans des champs gravitationnels très intenses : les raies d'emission d'éléments situés au cœur d'astres très massifs sont décalées vers le rouge. Cet effet, appelé décalage d'Einstein, a été vérifié plusieurs fois et est une conséquence de la déformation de l'espace-temps produite par un champ gravitationnel. Il est prédit dans le cadre de la **relativité générale**.

Malgré tout, pour la grande majorité des expériences usuelles, le postulat du temps absolu reste une excellente approximation.

1.8.2 Postulat de la distance absolue

> La distance entre deux points de l'espace est toujours identique du point de vue de deux observateurs en mouvement relatif.

Là encore, ce postulat est mis en défaut dans certaines situations extrêmes. Dans la grande majorité des cas, la cinématique classique (aussi appelée galiléenne ou newtonienne) est une excellente approximation.

2 Systèmes de coordonnées (voir fiche annexe)

3 Applications

3.1 Mouvement uniformément accéléré

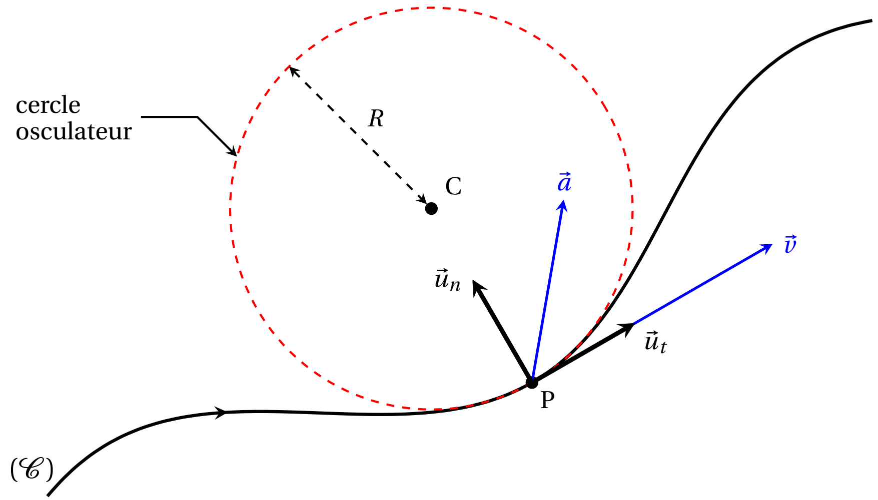
> Une masse m plongée dans le champ de pesanteur terrestre est lancée en l'air à la verticale, à la date $t = 0$, depuis le sol avec une vitesse V_0. En l'absence de frottements, son accélération est constante : $\vec{a} = \vec{g}$. Quelle est l'altitude maximale atteinte par la masse ? À quelle date retombe-t-elle sur le sol ? Avec quelle vitesse ?

3.2 Mouvement circulaire

> Un avion de chasse, assimilé ici à un point matériel, effectue un demi-tour en suivant une trajectoire circulaire de rayon R, à la vitesse constante $v = 800\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Déterminer le rayon minimum de la trajectoire pour que l'accélération ne dépasse pas $5g$ où $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ est l'accélération de la pesanteur.

4 Mouvement plan quelconque : repère de Frenet

On considère une trajectoire **plane** $(\mathscr{C})$ connue et régulière (on ne discutera pas des critères mathématiques nécessaires aux définitions qui suivent mais on admettra qu'ils sont respectés dans tous les cas de figure étudiés cette année en physique). La **base de Frenet** $(\vec{u}_n, \vec{u}_t)$ (qui devient un repère de Frenet si on lui associe une origine quelconque) est une base **mobile**, définie de manière **locale**, c'est-à-dire qui "suit" le mouvement du mobile.



La trajectoire $(\mathscr{C})$ étant une courbe plane, on peut lui attribuer **localement** (c'est-à-dire en chaque point P) :

- une unique **tangente**,
- une unique **normale** située dans le plan du mouvement,
- une **courbure** γ (sans rentrer dans les détails mathématiques qui ne sont pas au programme de ce cours, $\gamma(\mathrm{P})$ est une quantité définie positive et qui traduit la manière dont $(\mathscr{C})$ s'éloigne de sa tangente en P lorsqu'on s'éloigne de P). Bien que différente en chaque point de la trajectoire, on notera par la suite la courbure γ au lieu de $\gamma(\mathrm{P})$ pour alléger l'écriture.

À partir des trois propriétés présentées ci-dessus, on peut définir au point P (voir figure) :

- Le **cercle osculateur** : il s'agit de l'unique cercle situé dans le plan du mouvement, passant par P, dont la courbure en P est identique à celle de $(\mathscr{C})$ et dont le centre est situé vers "l'intérieur de la courbure". Son centre C est appelé le **centre de courbure** et son rayon R le **rayon de courbure** de $(\mathscr{C})$ au point P. On peut démontrer que le rayon de courbure est relié à la courbure par $R = 1/\gamma$.
- Le **vecteur de base $\vec{u}_n$** : il s'agit du vecteur unitaire dirigé selon la normale à $(\mathscr{C})$ en P et vers le centre de courbure.
- Le **vecteur de base $\vec{u}_t$** : il s'agit du vecteur unitaire dirigé selon la tangente à $(\mathscr{C})$ en P et dans le sens du vecteur vitesse.

Les vecteurs $\vec{u}_n$ et $\vec{u}_t$ sont orthogonaux l'un à l'autre donc ils forment une base du plan du mouvement, appelée base de Frenet. Dans cette base, on établit l'expression des vecteur vitesse et accélération du mobile :

$$\vec{v}(t) = \|\vec{v}\|\,\vec{u}_t \qquad\qquad \vec{a}(t) = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\,\vec{u}_n + \frac{\mathrm{d}\,\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t$$

Pour un mouvement plan quelconque, l'accélération se décompose en une composante normale $\frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{u}_n$ et un composante tangentielle $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t$.

- Dans la limite d'un mouvement rectiligne, $R \to \infty$. L'accélération normale tend vers 0 et $\vec{a}$ devient colinéaire à tout instant à $\vec{v}$.

- Dans la limite d'un mouvement uniforme, l'accélération tangentielle tend vers 0 et $\vec{a}$ devient orthogonal à tout instant à $\vec{v}$.

- Pour un mouvement rectiligne et uniforme, on retrouve $\vec{a} = \vec{0}$.

On remarquera également que l'on retrouve une expression de $\vec{a}$ cohérente avec celle obtenue en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire non-uniforme (le vecteur $\vec{u}_r$ étant alors à tout instant égal à l'opposé de $\vec{u}_n$).

<u>Application</u> : Un mobile suit une trajectoire plane caractérisée par les équations horaires ci-dessous dans un repère cartésien (Oxy).

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = \frac{1}{2}bt^2 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres positifs.

1. Déterminer l'équation cartésienne $y(x)$ de la trajectoire en éliminant la variable t. Tracer son allure.

2. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ dans la base cartésienne, puis leur norme, à tout instant.

3. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire à la date $t = 0$. Étudier les cas limites $a \to 0$ puis $b \to 0$.