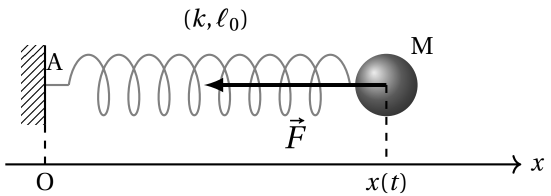
Chapitre 9 : Oscillateur harmonique

1 Système {masse + ressort}

1.1 Schéma du système



- Un ressort sans masse est attaché en un point A, fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- À l'autre extrémité du ressort est attaché un objet ponctuel de masse m qui est libre de se déplacer *sans frottement* sur l'axe horizontal (Ox).
- Le ressort étant initialement à l'équilibre, on l'étire sur une distance X_0 puis on lâche la masse sans vitesse initiale à $t = 0$.

1.2 Force de rappel élastique

Un ressort qui subit de petites déformations exerce sur la masse une *force de rappel élastique* de la forme :

$$\boxed{\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}}$$

- k est la **raideur** du ressort (en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$), ℓ sa longueur et ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- La grandeur $\ell - \ell_0$ est appelée **l'allongement** du ressort. Si $\ell < \ell_0$ le ressort est *comprimé*, si $\ell > \ell_0$ le ressort est *étiré* ;
- $\vec{i}$ est un vecteur unitaire tangent au ressort et **orienté dans le sens d'une longueur ℓ croissante**.

Rq : $\vec{F}$ est proportionnelle à l'allongement $\ell - \ell_0$ du ressort, c'est la loi de **Hooke**. Si les déformations sont trop importantes, cette loi n'est plus valable (le ressort se déforme irréversiblement et peut éventuellement se rompre).

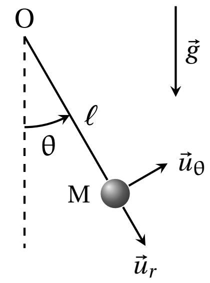
1.3 Mise en équation

Par application du PFD, on montre que l'allongement $X(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0}$$

2 Pendule simple

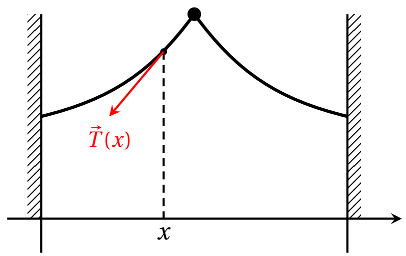
2.1 Schéma du système



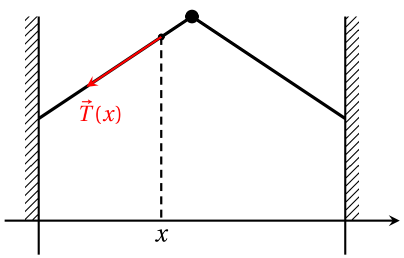
Une masse ponctuelle m est accrochée à l'extrémité d'un fil **inextensible** et **sans masse** de longueur ℓ, attachée à un point O fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

Le mouvement est repéré par l'angle orienté θ que fait la direction du fil (supposé tendu à tout instant) avec la verticale descendante. On choisit comme base d'étude la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

2.2 Tension d'un fil



Fil déformé sous l'effet de son poids



Fil inextensible et sans masse tendu

Un fil est assimilé à une courbe à une dimension dont chaque point est repéré par une abscisse x. Tant que le fil ne rompt pas, la portion du fil d'abscisse $x < x_M$ exerce sur la partie du fil d'abscisse $x > x_M$ une force $\vec{T}(x)$ qui permet de **maintenir la cohésion du fil**. Cette force est toujours **tangente au fil**.

> Pour un fil **inextensible** et **sans masse**, la norme $\|\vec{T}(x)\|$ de cette force a la même valeur en tout point du fil. On note T cette norme, elle est appelée **tension** du fil.

Rq : Un fil inextensible sans masse tendu est toujours rectiligne entre deux points de contact. En réalité, le poids d'un fil le déforme nécessairement.

2.3 Mise en équation

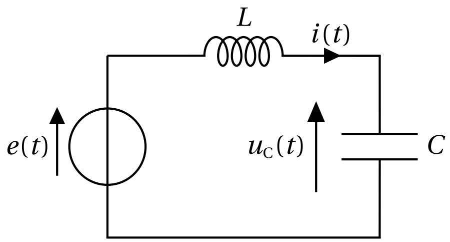
Le mouvement d'un pendule simple est régi par une équation différentielle non-linéaire. Cependant, dans le cas d'oscillations de faible amplitude, le pendule simple vérifie une équation différentielle similaire à celle du système {masse + ressort} :

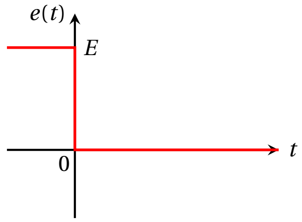
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

3 Circuit LC série en régime libre

3.1 Schéma du circuit

Il est possible de construire un oscillateur électrique avec un condensateur et une bobine idéales, associés en série. Dans le circuit ci-dessous, le générateur est **éteint** à la date $t = 0$ (on étudie donc le régime libre, c'est-à-dire l'évolution du circuit en l'absence d'alimentation).





3.2 Mise en équation

On montre rapidement que la tension aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_C}{LC} = 0}$$

4 Oscillations libres

4.1 Équation canonique de l'oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle dont la **forme canonique** est la suivante :

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = F(t)}$$

où $F(t)$ est une fonction quelconque du temps et ω_0 est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique. Dans les cas du système {masse + ressort}, dans l'approximation linéaire du pendule simple et pour le circuit LC série, on a respectivement :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Rq : La fonction $F(t)$ caractérise l'action du milieu extérieur sur l'oscillateur. Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à des cas où $F(t)$ est constante (action extérieure indépendante du temps).

4.2 Solution générale de l'équation d'évolution

La solution générale de l'équation de l'oscillateur harmonique est une ***fonction sinusoïdale***, qui peut s'écrire de manière équivalente sous 3 formes différentes :

$$X(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ C\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ D\sin(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$

Où les couples (A, B), (C, φ), (D, ψ) sont les constantes d'intégration de l'équation différentielle, associées à chaque expression. Quelque soit la forme choisie pour écrire $X(t)$, il faut connaître les **conditions initiales** pour pouvoir déterminer les valeurs de ces constantes.

4.3 Vocabulaire

Pour caractériser un signal sinusoïdal, on privilégie généralement l' expression suivante : $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. On lui associe le vocabulaire suivant :

X_m est l'**amplitude** des oscillations	ω est la **pulsation** des oscillations
$\phi(t) = \omega t + \varphi$ est la **phase** à l'instant t	φ est la **phase à l'origine**

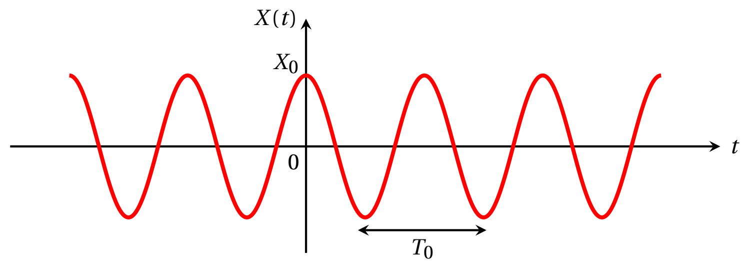
À partir de la pulsation , on définit la **période** T et la **fréquence** f par les relations suivantes :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Rq : Dans le cas d'oscillations harmoniques, la période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est appelée **période propre** et la fréquence $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$, **fréquence propre**.

4.4 Représentation graphique

En tenant compte des conditions initiales, la masse évolue de la manière suivante :



4.5 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

<u>Def</u> : Deux signaux sinusoïdaux sont **synchrones** s'ils possèdent la même fréquence (*ie* la même période ou la même pulsation).

<u>Def</u> : Soient deux signaux synchrones $X_1(t) = X_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $X_2(t) = X_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$. On appelle **avance de phase** du signal $S_1(t)$ sur le signal $S_2(t)$ la grandeur :

$$\boxed{\Delta\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad [2\pi]}$$

On appelle **déphasage** entre les deux signaux la valeur absolue de l'avance de phase de l'un par rapport à l'autre.

$$\boxed{\Delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| \quad [2\pi]}$$

- Puisque $\Delta\varphi_{1/2}$ est un angle, il est défini modulo 2π. Cela signifie qu'on peut toujours le ramener dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Si $\Delta\varphi_{1/2} > 0$ alors $X_1(t)$ est en avance par rapport à $X_2(t)$. Si $\Delta\varphi_{1/2} < 0$ alors $X_1(t)$ est en retard par rapport à $X_2(t)$.

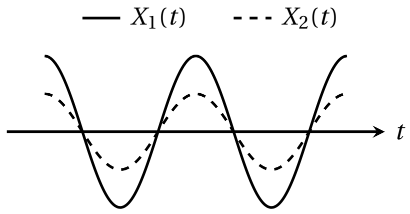
<u>Def</u> : On appelle **décalage temporel** la plus petite durée qui sépare un maximum (resp. un minimum) de $S_1(t)$ d'un maximum (resp. un minimum) de $S_2(t)$. On montre que le décalage temporel Δt est proportionnel au déphasage :

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

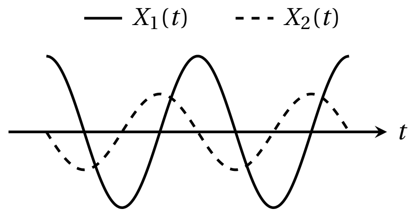
Où T est la période du signal.

<u>Def</u> : Un déphasage $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ correspond à un décalage temporel égal à quart de période. On dit que les signaux sont en **quadrature de phase**. Lorsque l'un des signaux est extrémal, l'autre s'annule et inversement.

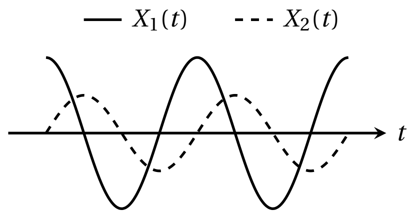
<u>Def</u> : Un déphasage $\Delta\varphi = \pi$ correspond à un décalage temporel égal à une demi-période. On dit que les signaux sont en **opposition de phase**. Lorsque l'un des signaux est maximal, l'autre est minimal et inversement.



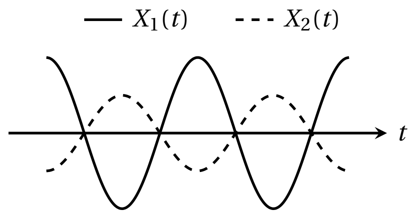
signaux en phase $\Delta\varphi_{1/2} = 0$



en quadrature de phase $\Delta\varphi_{1/2} = -\pi/2$



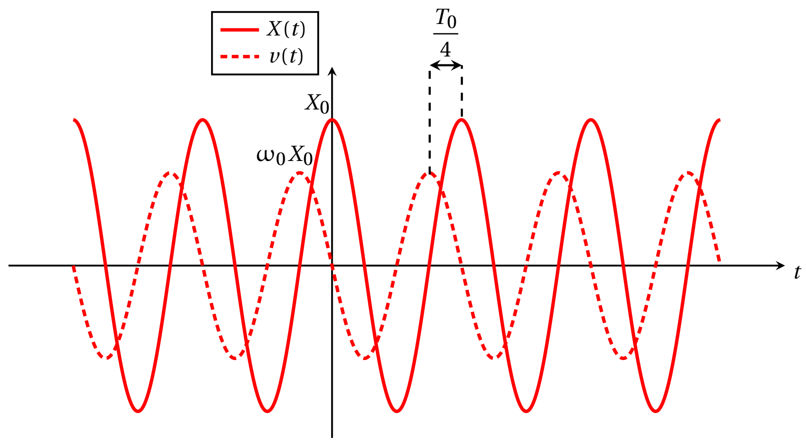
en quadrature de phase $\Delta\varphi_{1/2} = +\pi/2$



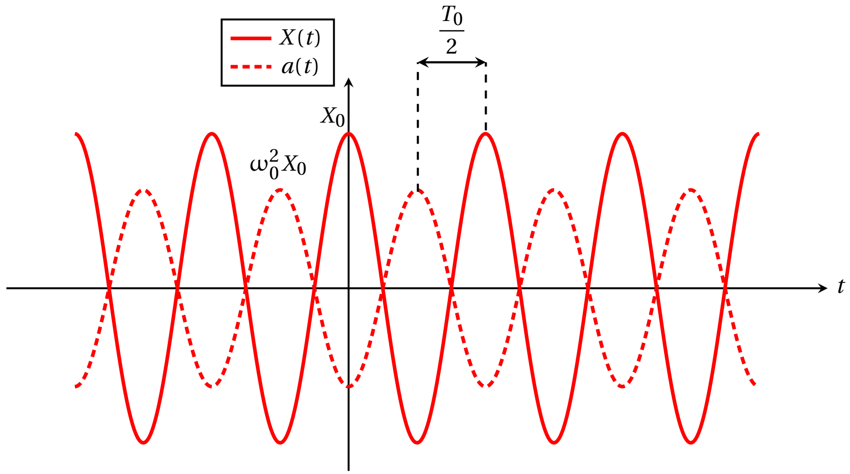
en opposition de phase $\Delta\varphi_{1/2} = \pi$

4.6 Vitesse, accélération

En dérivant deux fois successivement la position $X(t)$, on détermine l'expression de la vitesse et de l'accélération de la masse, dont on représente les évolutions temporelles ci-dessous :



Au cours d'oscillations harmoniques, la vitesse et la position sont en quadrature de phase. C'est la vitesse qui est en avance d'un angle $\frac{\pi}{2}$ sur la position.



Au cours d'oscillations harmoniques, l'accélération et la position sont en opposition de phase.

4.7 Isochronisme des oscillations

La période des oscillations est indépendante de leur amplitude.

Cette propriété est réalisée de manière exacte pour l'oscillateur harmonique. Ce n'est pas le cas du pendule simple : en dehors de l'approximation linéaire, la période des oscillations dépend effectivement de l'amplitude (voir figure ci-dessous). En revanche, on retrouve, de manière approchée, l'isochronisme dans le domaine de l'approximation linéaire $(\theta_m \lesssim \text{qq degrés})$.