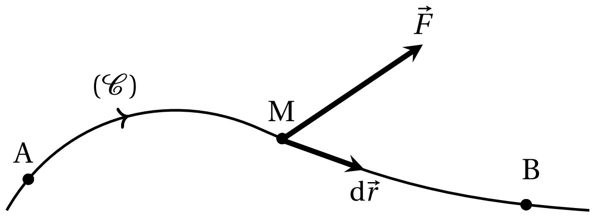
Chapitre 10 : Énergétique

1 Théorème de l'énergie cinétique

1.1 Travail d'une force

1.1.1 Travail élémentaire

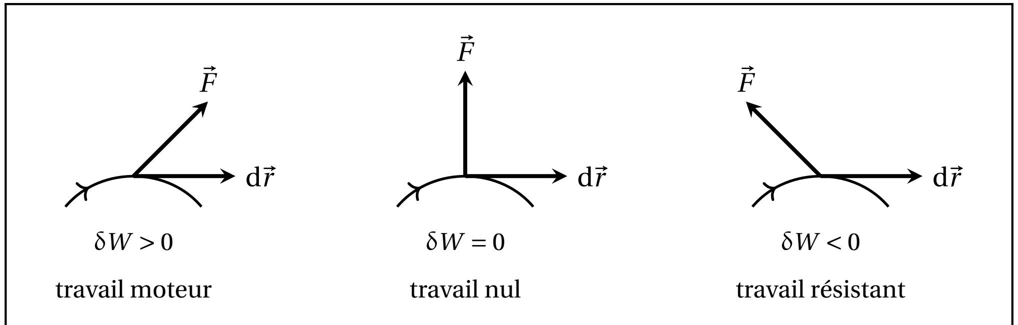
On considère un point matériel en mouvement le long d'une trajectoire $(\mathscr{C})$ qui subit une force $\vec{F}(\vec{r})$ qui dépend de sa position. On note $\mathrm{d}\vec{r}$ le déplacement élémentaire du point sur sa trajectoire entre t et $t+\mathrm{d}t$.



Def : On appelle **travail élémentaire** de la force $\vec{F}$ la quantité :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

δW est homogène à une énergie, c'est une grandeur algébrique.



1.1.2 Travail fini entre deux points d'une trajectoire

Def : On appelle **travail** de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B d'une trajectoire la somme des travaux élémentaires entre A et B :

$$\boxed{W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{(\mathscr{C})}(\vec{F}) = \int_{\mathrm{A},(\mathscr{C})}^{\mathrm{B}} \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

Rq : $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{(\mathscr{C})}(\vec{F})$ dépend du référentiel et, *à priori*, du chemin suivi pour aller de A à B.

1.2 Puissance d'une force

Def : On appelle **puissance** de la force $\vec{F}$ en un point M d'une trajectoire la quantité :

$$\boxed{\mathscr{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$\mathscr{P}$ dépend également du référentiel, c'est une grandeur qui s'exprime en watts (W).

1.3 Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique : On considère un point matériel en mouvement dans un référentiel galiléen sur une trajectoire $(\mathscr{C})$, soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_k$. Alors l'énergie cinétique de ce point vérifie la relation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_k \mathscr{P}_k}$$

Théorème de l'énergie cinétique : *La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux points A et B de sa trajectoire est égale à la somme des travaux de toutes le forces qui s'exercent sur lui.*

$$\boxed{\Delta E_c = \sum_k W(\vec{F}_k)}$$

Le théorème de l'énergie cinétique contient la même information que le PFD. Il permet notamment de retrouver l'équation d'un mouvement sur un critère purement énergétique.

2 Force conservative, énergie potentielle

2.1 Opérateur gradient (voir fiche “Éléments de calcul différentiel”)

2.2 Définitions

Une force $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})$ est dite **conservative** s'il existe une fonction des variables d'espace, notée $E_p(\overrightarrow{r})$ telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

La fonction E_p est appelée l'**énergie potentielle** associée à la force conservative $\overrightarrow{F}$. On dit également que $\overrightarrow{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p.

Rq : Si un système est soumis à plusieurs forces conservatives, leurs énergies potentielles s'additionnent. C'est une conséquence de la **linéarité** de l'opérateur gradient.

2.3 Travail d'une force conservative

Le travail d'une force conservative entre deux points A et B d'une trajectoire est **indépendant du chemin suivi** pour aller de A vers B.

La variation de l'énergie potentielle d'un point matériel est égal à l'opposé de la somme des travaux des forces **conservatives** :

$$\Delta E_p = -\sum_{\text{cons}} W(\vec{F}_k)$$

2.4 Énergie potentielle de pesanteur

Généralement, on exprime l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de la coordonnée cartésienne z, qui représente l'altitude du système. Dans le cas où l'axe (Oz) est **vertical ascendant**, l'énergie potentielle vaut :

$$E_p(z) = mgz + \text{Cste}$$

Rq : L'énergie potentielle est définie à une constante près. La valeur de la constante n'a aucune importance car seule la différence entre deux énergies potentielles constitue une information réelle sur le mouvement. Par conséquent, **cette constante peut être fixée de manière arbitraire**. Cela revient à dire que l'on peut librement choisir le lieu de l'espace qui correspond à l'origine de l'énergie potentielle.

Rq : Une énergie potentielle est une énergie disponible, de manière latente, dans un système et qui peut potentiellement être convertie en travail, c'est-à-dire en une forme d'énergie ordonnée (énergie cinétique, énergie électrique, énergie chimique,...).

2.5 Énergie potentielle élastique

La force de rappel élastique est une force conservative. Quelque soit le mouvement de la masse (1D, 2D, 3D), l'énergie potentielle peut s'écrire sous la forme générale :

$$E_p(z) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{Cste}$$

2.6 Forces non conservatives

On admet la condition nécessaire suivante pour qu'une force soit conservative ; elle peut dépendre de la position du système **mais pas de sa vitesse ni de son accélération**. C'est effectivement le cas du poids (qui ne dépend même pas de la position car c'est une force uniforme) et de la force de rappel élastique (qui dépend uniquement de la déformation du système).

- Les forces de frottements (fluides ou solides) qui dépendent de la vitesse du système sont non conservatives ;
- la tension d'un fil ou bien la réaction normale d'un support qui dépendent de l'accélération du système sont non conservatives.

Rq : Parmi les forces non conservatives il y en a qui ont la particularité de ne **pas travailler** car elles sont à tout moment orthogonales au déplacement du système ; c'est le cas par exemple de la tension du fil d'un pendule simple ou bien d'une réaction normale.

3 Énergie mécanique

3.1 Définition

Def : L'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

3.2 Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égal à la somme des travaux des forces **non conservatives** :

$$\Delta E = \sum_{\text{non cons}} W(\vec{F}_k)$$

Un système est **conservatif** s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives ou bien si les forces non conservatives ne travaillent pas. Son énergie mécanique est alors une **constante du mouvement**.

Comme pour l'énergie cinétique, on peut réécrire ce théorème en termes de puissances (théorème de la puissance mécanique) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_{\text{non cons}} \mathscr{P}_k}$$

3.3 Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système conservatif est constante. Cela implique, pour un mouvement à un degré de liberté, que la variable d'espace est solution d'une équation du type

$$E(\dot{x}, x) = \text{Cste}$$

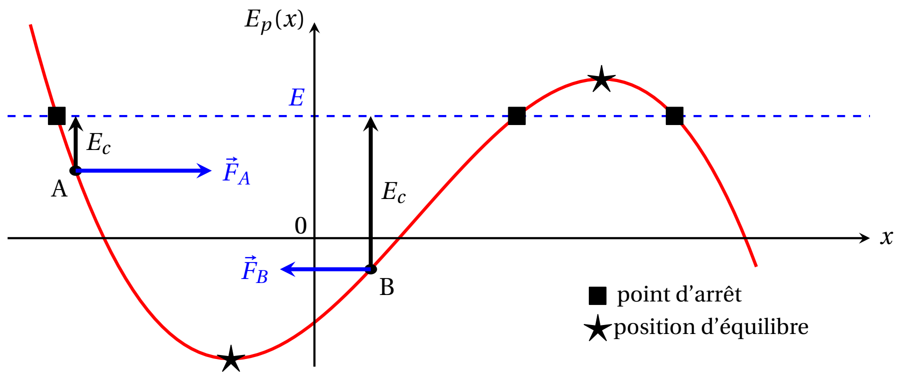
Cette équation est appelée **intégrale première du mouvement**. Elle donne une relation entre la vitesse du point matériel et sa position. En dérivant une intégrale première du mouvement, on retrouve l'équation du mouvement obtenue avec le PFD.

Application : On lance depuis le sol une masse m à la verticale, vers le haut, avec une vitesse initiale V_0. Les frottements de l'air sont négligés. Exprimer l'altitude H atteinte par la masse avant de retomber vers le sol.

4 Mouvement d'un système conservatif à un degré de liberté dans un champ d'énergie potentielle

4.1 Lecture d'un graphe d'énergie potentielle

On considère un point matériel dont le mouvement est décrit par une seule coordonnée (elle peut être une distance ou angle). On parle alors d'un mouvement à un degré de liberté. Ce point matériel est soumis à une ou plusieurs forces conservatives et possède une énergie potentielle totale $E_p(x)$. Le système étant conservatif, son énergie mécanique E est constante. La connaissance de la fonction $E_p(x)$ permet d'obtenir des informations sur le mouvement du point dans l'espace. Par la suite, nous allons nous appuyer sur le graphe de la fonction $E_p(x)$, dont voici un exemple ci-dessous :



Pour une valeur donnée d'énergie mécanique (représentée sur le graphe par une horizontale en pointillées), voici les informations qualitatives que l'on peut extraire du graphe :

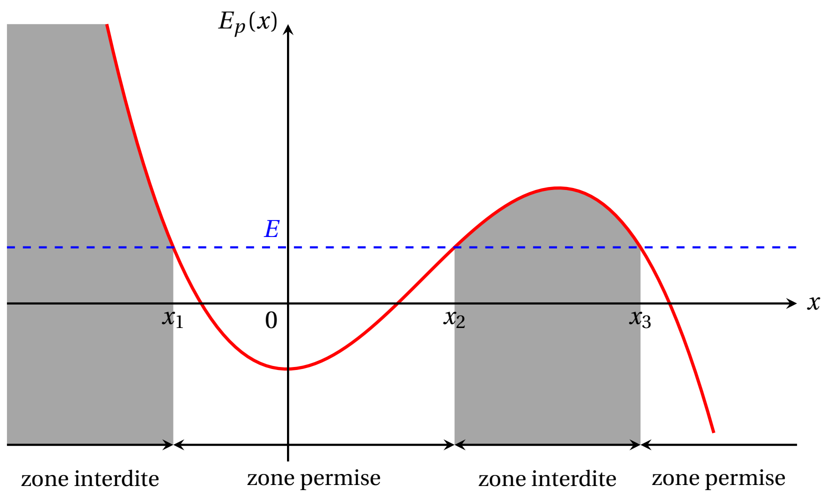
- l'écart entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle permet de mesurer **l'énergie cinétique** du mobile (voir points A et B sur le graphe, l'énergie cinétique est positive si la flèche va vers le haut).
- les lieux où l'énergie potentielle est égale à l'énergie mécanique sont des **points d'arrêt** du mobile (sa vitesse y est nulle). Sur le graphe ci-dessus, ces lieux sont repérés par des carrés.
- en un point de coordonnées x quelconque, le sens de la force qui s'exerce sur le mobile est donné par le sens de variation de $E_p(x)$.
  - $\vec{F}$ est dirigée suivant $+\vec{u}_x$ si $E_p(x)$ est décroissante,
  - $\vec{F}$ est dirigée suivant $-\vec{u}_x$ si $E_p(x)$ est croissante,
- plus la pente est forte (en valeur absolue) et plus la force est élevée (en norme),
- Les extréma de $E_p(x)$ sont des lieux où la force $\vec{F}$ est nulle. Par conséquent, il s'agit de **positions d'équilibre** pour le mobile. Sur le graphe ci-dessus, ces lieux sont représentés par des étoiles.

4.2 Zones interdites

Un point matériel d'énergie mécanique E plongé dans un champ d'énergie potentielle $E_p(x)$ doit vérifier la condition : $E_p(x) \leqslant E$. Cette condition permet de séparer l'espace en deux :

- Tous les points x de l'espace tels que $E_p(x) \leqslant E$ peuvent être atteint par le point matériel.
- Tous les points x de l'espace tels que $E_p(x) > E$ sont inatteignables. Ils constituent une zone interdite au point matériel.

La construction du graphe d'énergie potentielle $E_p(x)$ permet d'illustrer ces zones. On donne un exemple ci-dessous :



4.3 Puits de potentiel

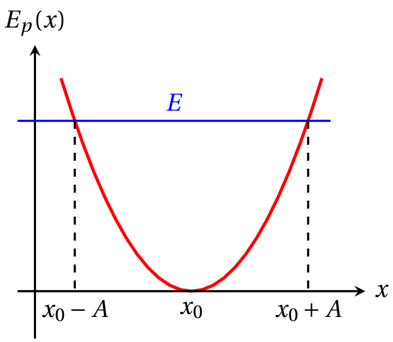
Un point matériel est dans un puits de potentiel ssi sa trajectoire est bornée. C'est le cas de la figure précédente : Si le mobile se trouve, à instant donné, dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ où x_1 et x_2 sont telles que $E_p(x_1) = E_p(x_2) = E$, alors il demeurera dans cet intervalle par la suite.

Dans un puits de potentiel, la trajectoire est **bornée** et le mouvement est **périodique**.

Le graphique ci-contre représente un cas particulier, le puits de potentiel **harmonique**, défini par une énergie potentielle du type :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x - x_0)^2 + \text{Cste}$$

Dans un puits de potentiel harmonique, le mouvement est sinusoïdal, de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, d'amplitude A telle que $E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$.



4.4 Position d'équilibre, stabilité

Def : Un point M_0 de l'espace est une position d'équilibre ssi un point matériel lâché sans vitesse intiale en M_0 demeure dans son état de repos.

Une position d'équilibre correspond à un **extrémum** d'énergie potentielle.

Def : Un point matériel est au repos dans une position d'équilibre. Si, après une petite perturbation du système, le point reste à tout instant au voisinage de sa position d'équilibre alors celle-ci est stable. Sinon elle est instable.

Un minimum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable.
Un maximum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre instable.

De manière mathématique, on peut caractériser les positions d'équilibre et leur stabilité par les critères suivants :

- si $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{M_0} = 0$ et $\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{M_0} > 0$ alors M_0 est une position d'équilibre stable.
- si $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{M_0} = 0$ et $\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{M_0} < 0$ alors M_0 est une position d'équilibre instable

4.5 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

4.5.1 Développement d'une fonction en série de Taylor

Si f est une fonction infiniment dérivable en un point x_0 alors, au voisinage de x_0 , on peut assimiler la fonction f a une série de fonctions polynomiales :

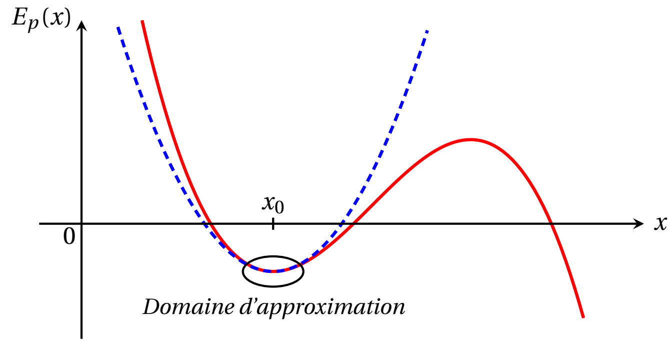
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{x_0} + \ldots$$

4.5.2 Cas de la fonction énergie potentielle

Au voisinage d'une position d'équilibre stable x_0, on approche la fonction $E_p(x)$ par son développement en série de Taylor à l'ordre 2, c'est-à-dire sous la forme :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}$$

Graphiquement cette approximation consiste à assimiler localement l'énergie potentielle à un potentiel harmonique ayant exactement la même courbure au niveau de la position d'équilibre.



Au voisinage d'une position d'équilibre stable x_0, on peut assimiler le système à un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 telle que $m\omega_0^2 = \left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}$

4.5.3 Équation approchée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Autour d'une position d'équilibre stable x_0, on peut établir une forme approchée de l'équation du mouvement en effectuant un développement de la force $F(x)$ **au premier ordre**. On obtient alors une équation d'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \qquad \text{avec} \qquad m\omega_0 = -\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}$$

où $\varepsilon = x - x_0$ est un petit écart par rapport à la position d'équilibre stable. D'un point de vue mathématique, il est équivalent d'effectuer un développement de la force $F(x)$ au premier ordre ou bien un développement de l'énergie potentielle $E_p(x)$ au deuxième ordre.