DS de physique n° 3

Durée : 3h

*L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.*

Exercice 1 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

On considère le montage de la figure 1 dans lequel un générateur est une source idéale de tension E constante, avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C_0 = 10\,\mathrm{nF}$. Initialement les circuits sont ouverts (interrupteur K en position milieu) et les condensateurs sont déchargés. À l'instant initial $t = 0$ on ferme K en position 1.

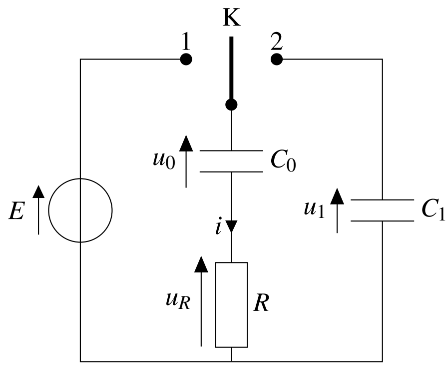


Figure 1 : Montage à deux condensateurs

1. Faire un schéma simplifié du circuit quand K est en position 1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_0(t)$ au bornes du condensateur de capacité C_0. Déterminer littéralement et numériquement la constante de temps τ_0.

2. Déterminer $u_0(t)$ à tout instant $t > 0$ et tracer l'allure de son graphe.

3. Exprimer l'énergie E_0 reçue par le condensateur C_0 au cours de ce régime transitoire.

Le régime permanent étant atteint, on bascule K en position 2 à un instant pris comme nouvelle origine temporelle $t = 0$.

4. Faire un schéma simplifié du circuit quand K est en position 2. En écrivant la loi d'évolution des deux condensateurs montrer que $C_0u_0(t) + C_1u_1(t)$ ne dépend pas du temps. Déterminer la valeur de cette constante à partir des conditions initiales.

5. Montrer que $u_0(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{C_0 + C_1}{RC_0C_1}u_0 = \frac{E}{RC_1}$$

6. Déterminer sans résoudre l'équation les valeurs $u_0(\infty)$ et $u_1(\infty)$ en régime permanent.

7. Déterminer pour ce régime transitoire l'énergie E_0' fournie par le condensateur C_0, l'énergie E_1 reçue par le condensateur C_1 et l'énergie E_R reçue par le résistor.

8. Le condensateur C_1 est en fait le condensateur équivalent à N condensateurs de même capacité C_0 placés en dérivation. Exprimer le rapport $r = E_1/E_0$ en fonction de N. Faire l'application numérique pour $N = 9$.

Exercice 2 : La grêle

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse m, qui chute dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On note Oz un axe *descendant* vers le sol. L'origine O marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire orienté vers le bas.
On néglige ici tout frottement.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

2. Déterminer la position $z(t)$ du grêlon à tout instant $t > 0$.

3. Exprimer la vitesse du grêlon en fonction de sa position z.

4. Déterminer un ordre de grandeur de la vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{u}_z$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}\pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0,5$.

5. Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.

6. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α, m et g.

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim}, appelée vitesse limite.
On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ en prenant comme paramètres $m = 0,24\,\text{kg}$, $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3}\,\text{SI}$ et $g = 9,8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

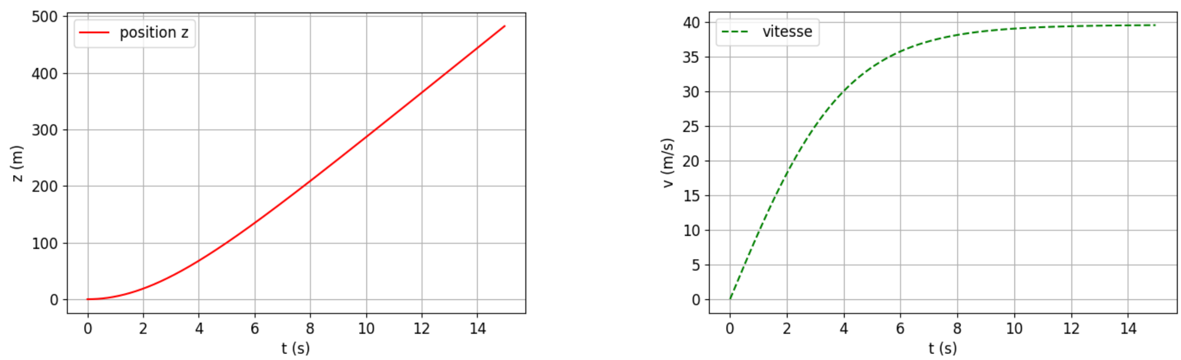


Figure 2 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon, courbes obtenues par résolution numérique

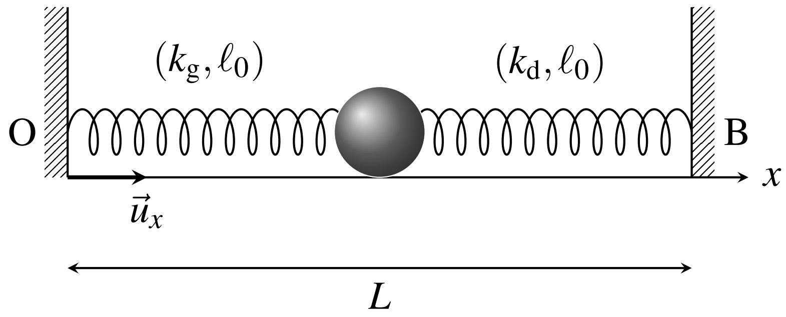
7. Déterminer l'unité SI du coefficient α.

8. La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ?

Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.

Exercice 3 : Mouvements de systèmes {masses + ressorts}

Première partie : Système à une seule masse



Une masse m est accrochée à deux ressorts de même longueur à vide ℓ_0, fixés en des points O (origine du repère) et B distants de L. Les ressorts ont des raideurs k_g et k_d (voir schéma). Le mouvement de la masse est repéré par sa position x mesurée à partir de O. On note respectivement ℓ_g et ℓ_d les longueurs des ressorts de gauche et de droite, $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ les forces exercées par les ressorts de gauche et de droite sur la masse. On néglige tout frottement.

1. Exprimer $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ en fonction de k_g, k_d, ℓ_g, ℓ_d, ℓ_0 et du vecteur unitaire $\vec{u}_x$.

2. Dans cette question, la position de la masse est quelconque. Exprimer ℓ_g et ℓ_d en fonction de x.

3. Montrer que l'équation du mouvement de la masse s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$

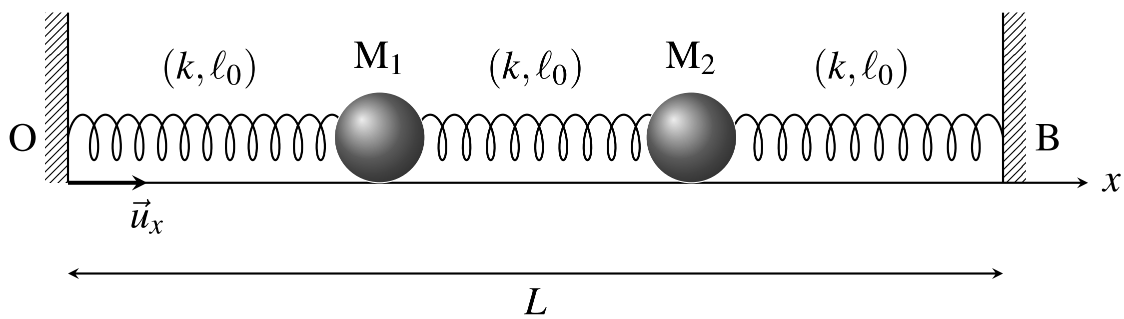
où ω_0 et x_e sont à exprimer en fonction de k_g, k_d et m. Montrer que le système est équivalent à un ressort unique dont on donnera la constante de raideur K en fonction de k_g et k_d. Que représente x_e pour le système {masses + ressort} ?

4. À la date $t = 0$, on lance la masse depuis sa position d'équilibre avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$. Déterminer $x(t)$ à tout instant.

5. Donner l'expression de la période T_0 et de l'amplitude X_m des oscillations.

   AN : $k_g = 8\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $k_d = 12\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $m = 200\,\mathrm{g}$, $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer T_0 et X_m.

Deuxième partie : Modes propres de vibration d'un système {masses + ressorts}



On considère le système ci-dessus, constitué de trois ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide nulle ($\ell_0 = 0$). Aux points M_1 et M_2 se trouvent deux masses identiques m. On repère les positions des deux masses par leurs abscisses respectives x_1 et x_2 sur un axe (Ox) horizontal. Le système est confiné entre deux parois distantes de L.

6. Appliquer le PFD en M_1 et M_2 et établir un système de deux équations différentielles vérifiées par $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

7. On définit les variables $S = x_1 + x_2$ et $D = x_2 - x_1$. Montrer que S et D vérifient les équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{S} + \dfrac{k}{m}S = \dfrac{k}{m}L \\ \ddot{D} + \dfrac{3k}{m}D = \dfrac{k}{m}L \end{cases}$$

8. On impose les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, les deux masses sont lâchées sans vitesse initiales depuis les positions $x_1(0) = \frac{L}{3} + a$ et $x_2(0) = \frac{2L}{3} - a$. Exprimer $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Quelle est la pulsation des oscillations ? Quel est le déphasage entre les mouvements des deux masses ?

9. On impose désormais les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, les deux masses sont lâchées sans vitesse initiales depuis les positions $x_1(0) = \frac{L}{3} + a$ et $x_2(0) = \frac{2L}{3} + a$. Exprimer $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Quelle est la pulsation des oscillations ? Quel est le déphasage entre les mouvements des deux masses ?

Remarque : cet exercice permet de mettre en évidence deux modes propres de vibration du système, de fréquences différentes. Selon les conditions initiales imposées, le système peut soit osciller dans l'un des modes propres, soit être dans une superposition de ces deux modes propres.