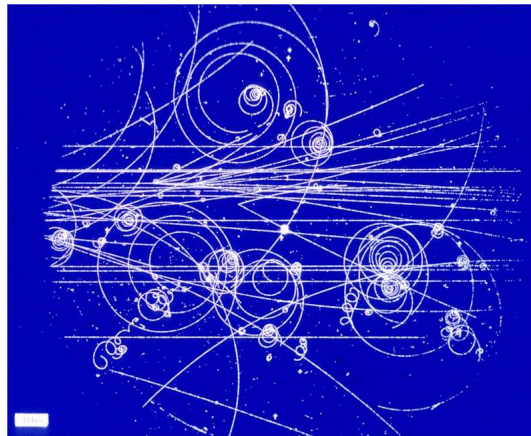


DM de physique n° 4

Exercice 1 : Proton en mouvement dans une chambre à bulles



On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

Un proton de masse m et de charge e considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ en un point fixe O choisi comme origine du repère d'étude. Il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton à l'instant de date t .

Par la suite, on posera : $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{k}$.

1. Établir l'équation différentielle **vectorielle** du mouvement du proton (on négligera le poids du proton).

On désigne par $(Oxyz)$ un trièdre orthogonal direct lié au référentiel galiléen et par $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base de vecteurs unitaires qui lui est associée. On choisit : $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$.

2. Si la force de frottement était négligeable et si v_{0z} était nulle, quelle serait la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire) ?

3. Déterminer un système de trois équations différentielles couplées du second ordre vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

4. Intégrer **une fois** par rapport au temps, en tenant compte des conditions initiales, chacune des équations de ce système et en déduire trois équations différentielles couplées du premier ordre vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

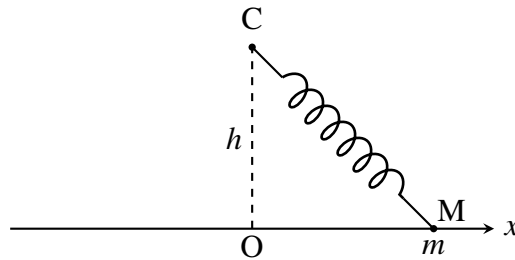
5. Déterminer $z(t)$.

6. Le proton s'arrête quand $t \rightarrow \infty$. Déterminer les coordonnées $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ de sa position finale.

7. Montrer qu'à partir des résultats des questions 3 et 4 il est possible d'établir un système de deux équations différentielles du deuxième ordre **découplées** vérifiées par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. Vérifier la cohérence des expressions obtenues vis-à-vis du résultat de la question 6.

Exercice 2 : Mouvements d'un système masse + ressort

On dispose d'un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'une des extrémités de ce ressort est reliée à un point fixe C et l'autre à un anneau de masse m couissant sans frottement sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



1. Exprimer l'énergie potentielle élastique $E_p(x)$ du système.
2. On suppose que $h > \ell_0$.
 - a) À l'aide d'un tableau de variations tracer l'allure de $E_p(x)$. Justifier qu'il existe une unique position d'équilibre stable et indiquer où elle se situe.
 - b) Déterminer la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
On donne $E_p''(x) = k \left(1 - \frac{\ell_0 h^2}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \right)$.
3. On se place désormais dans le cas $h < \ell_0$.
 - a) À l'aide d'un tableau de variations tracer l'allure de $E_p(x)$. Déterminer les différentes positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
 - b) Le système étant dans l'une des deux positions d'équilibre stable, on veut l'envoyer dans l'autre position d'équilibre stable. Déterminer la vitesse minimale avec laquelle il faut la lancer pour que ceci soit possible.
4. Dans cette question on suppose que $h = \ell_0$. On abandonne sans vitesse initiale l'anneau dans la position $x = a$.
 - a) On note $f(x) = \sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0$. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 autour de $x = 0$ de $f(x)$. En déduire que pour de petits déplacements de la masse autour de $x = 0$, l'énergie potentielle s'écrit de manière approchée sous la forme :

$$E_p(x) = Ax^4$$

où A est une constante à exprimer en fonction de k et ℓ_0 .

- b) La position d'équilibre $x = 0$ est-elle stable ? Les oscillations de petites amplitudes autour de $x = 0$ sont-elles harmoniques ? Justifier.
- c) Montrer qu'on peut écrire une intégrale première du mouvement sous la forme :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{k}{8\ell_0^2} (a^4 - x^4)$$

- d) En remarquant que $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ et en utilisant le résultat de la question précédente on admet qu'il est possible d'écrire la période des oscillations sous forme intégrale :

$$T = 8I \left(\frac{\ell_0}{a} \right) \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}} \approx 1,31$. Y a-t-il isochronisme des oscillations ? Justifier.

Exercice 3 : Interférences entre deux sources lumineuses

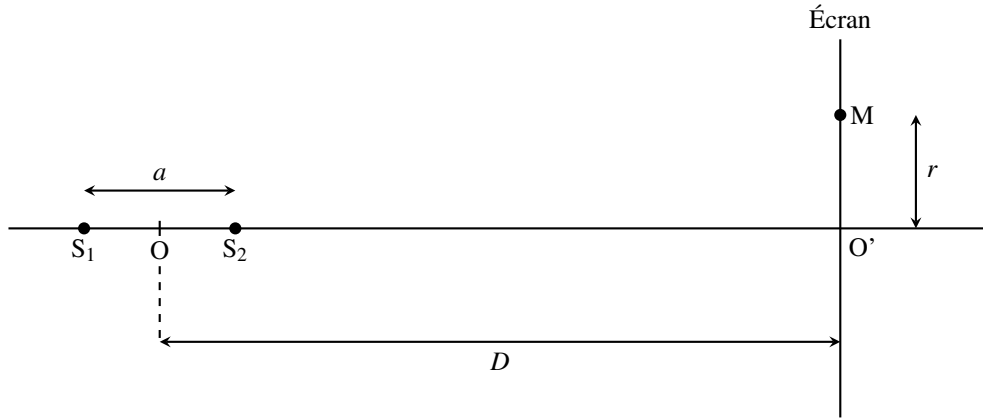


FIGURE 1 : Dispositif interférentiel

On considère deux sources ponctuelles monochromatiques S_1 et S_2 distantes de a , plongées dans l'air d'indice égal à 1, émettant des ondes lumineuses de même longueur d'onde dans le vide λ . On admet que les ondes lumineuses issues de ces deux sources peuvent interférer entre elles et on s'intéresse à l'éclairement produit sur un écran éloigné ($D \gg r$ et $D \gg a$). Sur la figure 1, O est le centre du segment $[S_1S_2]$, O' le point d'intersection de la droite (S_1S_2) avec l'écran et M un point quelconque de l'écran, situé à une distance r de O'.

1. Exprimer les distances S_1M et S_2M en fonction de a , r et D .
2. On admet les développements de Taylor à l'ordre 3 en a/D et r/D .

$$S_1M \simeq D \left(1 + \frac{a}{2D} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{ar^2}{4D^3} \right) \quad \text{et} \quad S_2M \simeq D \left(1 - \frac{a}{2D} + \frac{r^2}{2D^2} + \frac{ar^2}{4D^3} \right)$$

Montrer que l'on peut alors écrire l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M sous la forme $p(M) = p_0 - \alpha r^2$ où p_0 et α sont deux constantes positives à exprimer en fonction des données du problème.

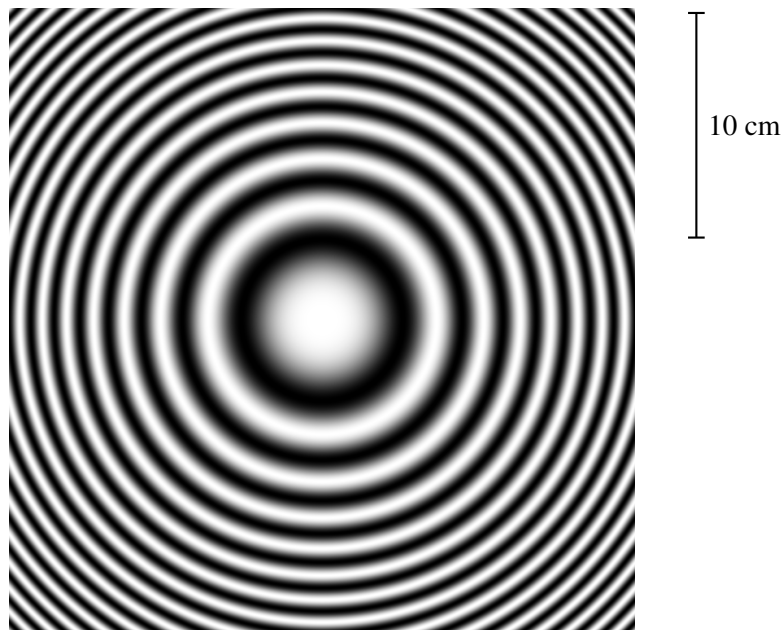


FIGURE 2 : Allure de la figure d'interférence

La figure 2 représente l'éclairement observé sur l'écran, le centre de la figure correspondant au point O'.

3. En vous appuyant sur le résultat de la question 2 justifier que les franges d'interférences sont circulaires et centrées sur O'.
4. Le centre de la figure d'interférence est brillant. Que pouvez-vous dire de la valeur de p_0 ? Justifier.
5. Quel est l'ordre d'interférence correspondant au premier anneau brillant ? Au k -ième anneau brillant ?
En déduire que le rayon r_k du k -ième anneau brillant vaut :

$$r_k = \sqrt{k}r_1$$

où r_1 est le rayon du premier anneau brillant, à exprimer en fonction de a , λ et D .

6. En vous servant de la figure 2, déterminer numériquement la distance a entre les deux sources.

Données : $\lambda = 532 \text{ nm}$, $D = 1,2 \text{ m}$.

7. Expliquer qualitativement de quelle façon la figure d'interférences est modifiée si l'on plonge le dispositif dans de l'eau d'indice $n \simeq 1,33$.